CAPITOLO 0

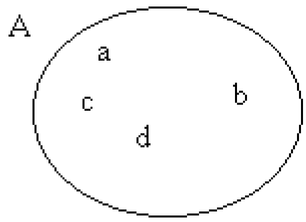
INSIEMI

Teoria in sintesi:

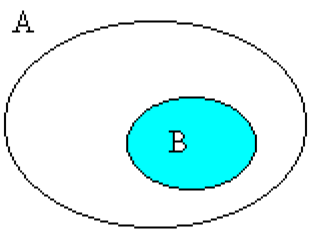
Il concetto di insieme in genere è assunto come primitivo, suoi sinonimi sono aggregato, collezione…; un insieme è definito assegnandone i suoi elementi.

Un insieme viene indicato con una lettera maiuscola e:

- mediante parentesi graffe, specificandone gli elementi o alcuni di essi
  es: A = $\{a,b,c,d\}$, **N** = $\{0,1,2,...,n,...\}$
- mediante parentesi graffe, con la proprietà caratteristica degli elementi dell'insieme
  es: P = $\{2n : n \in N\}$ (è l'insieme dei numeri pari)
- mediante diagrammi in cui si elencano gli elementi o alcuni di essi
  es:



Per indicare che l'elemento **a** *appartiene* all'insieme A scriviamo: **a**$\in$**A,**
per indicare che l'elemento **e** *non appartiene* all'insieme A scriviamo **e**$\notin$ **A.**



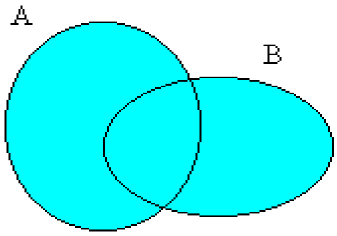
Definizione: si dice che B è *sottoinsieme* di A se per qualunque x$\in$B è anche x$\in$A.
Per indicare che B è *sottoinsieme* di A , cioè che B è contenuto in A, scriviamo **B$\subset$A** oppure **A$\supset$B.**

Definizione: due insiemi si dicono *uguali* se contengono gli stessi elementi.

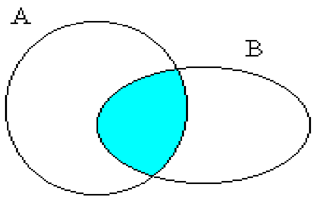
Quindi è A = B se A$\subseteq$ B e B$\subseteq$A.

Il simbolo $\varnothing$ è usato per indicare *l'insieme vuoto*, cioè un insieme privo di elementi.
Operazioni insiemistiche fondamentali:

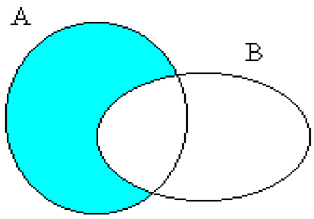
- *unione*: A$\cup$B è l'insieme costituito dagli elementi appartenenti ad A o a B;
  in simboli: A$\cup$B = $\{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}$.



- *intersezione*: A∩B è l'insieme costituito dagli elementi appartenenti ad A e a B; in simboli: A∩B = $\{x : x \in A \; e \; x \in B\}$.

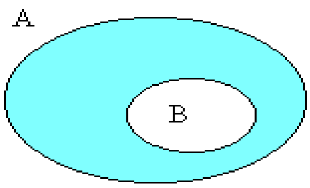


- *differenza* di A e b e si scrive A\B l'insieme degli x che appartengono ad A e non appartengono a B, in simboli: A\B = $\{x : x \in A \; e \; x \notin B\}$.



Definizione: due insiemi che non hanno elementi in comune, cioè tali che A∩B = ∅, si dicono *disgiunti.*

Definizione: Se un insieme B è sottoinsieme di un insieme A gli elementi che appartengono ad A ma non a B costituiscono un insieme detto *complementare* di B rispetto ad A.



Quando è ben chiaro l'insieme (detto insieme universo) in cui è contenuto l'insieme B, il complementare di B si indica di solito soprassegnando il nome dell'insieme es: $\overline{B}$.

ESERCIZI

1. Siano A e B due insiemi disgiunti, A contiene 8 elementi e B 5. Quanti elementi ha $A \cup B$? [13]

2. Siano A e B due insiemi non disgiunti, A contiene 8 elementi e B 5. Quanti elementi ha $A \cup B$?
[non si può dire]

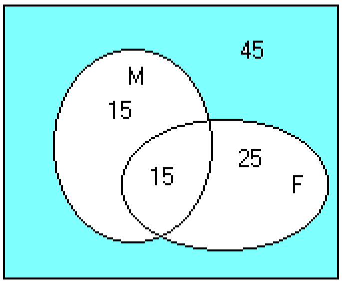
3. Siano A e B due insiemi non disgiunti, A contiene 8 elementi e B 5, ma 3 elementi appartengono ad entrambi gli insiemi. Quanti elementi ha $A \cup B$. ? [10]

4. Siano A e B due insiemi, A contiene 8 elementi e B 5, ma B è sottoinsieme di A . Quanti elementi ha $A \cup B$? [8]

5. Si può scrivere che: numero elementi di $A \cup B$ = numero elementi da A + numero elementi di B – numero elementi di $A \cap B$.? [si]

6. Da un'indagine fatta nelle scuole italiane si ha che il 30% degli studenti amano la matematica , il 40% degli studenti amano la fisica, il 15% degli studenti amano entrambe.Quanti studenti non amano nessuna delle due materie?

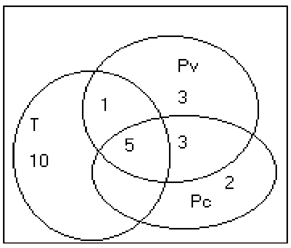
   [Il problema può essere schematizzato dal seguente diagramma:

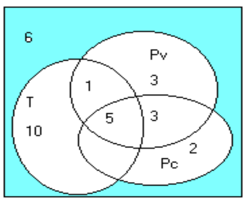


Infatti nel 30% degli studenti che amano la matematica e nel 40% degli studenti che amano la fisica è compreso anche il 15% degli studenti che amano entrambe.
Gli studenti che amano solo la matematica sono dati da $M \setminus F$.
Quelli che amano solo la fisica da $F \setminus M$.
Quelli che amano entrambe da $M \cap F$.
Quelli che amano o la matematica o la fisica (cioè almeno una delle due) da $M \cup F$.

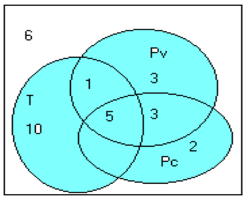
Quelli che non amano nessuna di esse dal complementare di $M \cup F$ che si indica con $\overline{M \cup F}$ e sono il 45%.]

7. Col diagramma seguente si rappresentano 30 persone di cui 10 giocano solo a tennis, 3 solo a pallavolo, 2 solo a pallacanestro, 1 sia a pallavolo che a tennis, 3 sia a pallavolo che a pallacanestro.

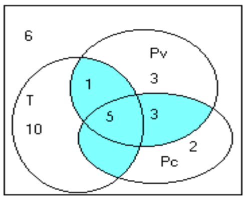


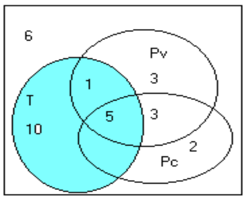
Indicare le persone che non fanno nessuno di questi sport 

[insieme complementare]

Le persone che fanno almeno uno sport 

[insieme unione]

Le persone che fanno almeno 2 sport 

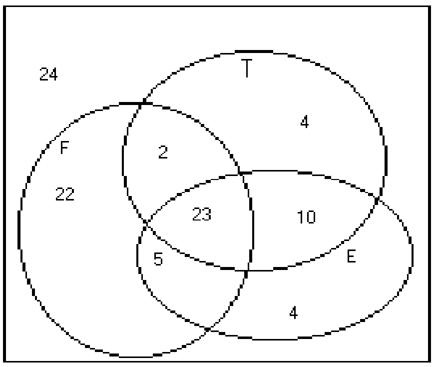
Le persone che giocano a tennis 

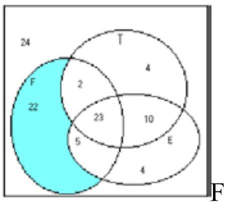
8. In una officina di riparazioni auto c'è la seguente tabella di lavori da eseguire:

Auto in garage	Auto ancora da riparare
94	70

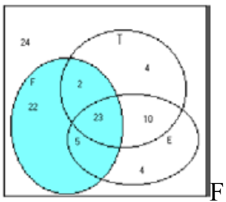
Si hanno inoltre le seguenti informazioni:
22 auto devono riparare solamente i freni;
23 auto devono riparare freni trasmissione ed impianto elettrico;
25 auto hanno almeno freni e trasmissione guasti;
28 auto hanno almeno freni ed impianto elettrico guasti;
10 auto hanno i freni a posto, ma né impianto elettrico né trasmissione funzionanti;
il numero delle auto che devono riparare solo l'impianto elettrico è uguale al numero di auto che devono riparare solo la trasmissione.
Quante auto devono riparare solo i freni?
Quante devono riparare i freni?
Quante almeno i freni e la trasmissione?
Quante freni e trasmissione ma non impianto elettrico?
Quante non hanno guasti?
Quante non hanno guasti i freni?

Il problema è schematizzato dalla figura seguente:

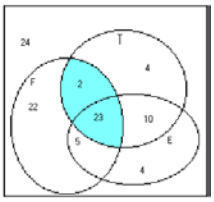


Quante auto devono riparare solo i freni? 

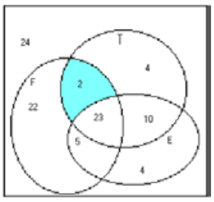
$F \setminus F\cap T \setminus F\cap E = F \setminus T \setminus E$

Quante devono riparare i freni? 

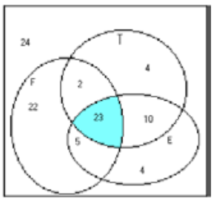
F

Quante almeno i freni e la trasmissione? 

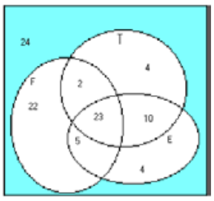
$F\cap T$

Quante solo i freni e la trasmissione? 

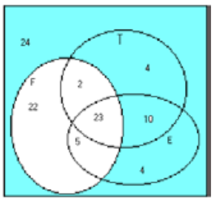
$F\cap T \setminus F\cap T\cap E = F\cap T \setminus E$

Quante freni e trasmissione e, impianto elettrico? 

$F\cap T\cap E$

Quante non hanno guasti? 

$\overline{F \cup T \cup E}$

Quante non hanno guasti i freni 

$\overline{F}$

9. Sia A = $\{multipli\ di\ 2\}$ e B = $\{multipli\ di\ 4\}$ e C = $\{multipli\ di\ 8\}$

Da quali elementi sono formati i seguenti insiemi?

$A\cup B\cup C$ [A]

$A\cap B\cap C$ [C]

$(A\cup B)\cap C$ [C]

$(A\cap B)\cup C$ [B]

10. Quanti elementi ha l'insieme $\varnothing$? E l'insieme $\{\varnothing\}$?

ELEMENTI DI LOGICA

PREMESSA

Questa parte non è strettamente necessaria come prerequisito matematico, tuttavia è indispensabile che uno studente distingua chiaramente ipotesi, tesi, condizione necessaria, e/o sufficiente, il ragionamento per contraddizione eccetera. Ne consigliamo comunque la lettura, con particolare attenzione agli esempi. Le tabelle di verità sono utili per la comprensione delle parti seguenti, ma non è indispensabile saperle costruire.

Teoria in sintesi:

La logica si occupa di come impostare ragionamenti corretti, cioè di come dedurre correttamente da premesse ritenute vere conseguenze coerenti.

Potremmo definirla in senso lato come la scienza che studia le procedure necessarie perché la deduzione sia rigorosa, corretta ed efficace, codificando le regole e le leggi per dedurre in modo rigoroso.

Problema: *gli abitanti di un'isola sono esclusivamente di due tipi: cavalieri che dicono sempre la verità e furfanti che mentono sempre*
Tre abitanti di quest'isola, A B e C stavano assieme in un giardino: Passò un forestiero e chiese ad A :"lei è un furfante o un cavaliere?"
A rispose qualcosa che il forestiero non riuscì a capire. Allora questi chiese a B "che cosa ha detto?"
B rispose: "ha detto che è un furfante"
A questo punto C disse: non creda a B, egli sta mentendo".
Cosa sono A B e C?

(sia un cavaliere che un furfante non diranno mai "io sono un furfante" così che B ha mentito, ma allora C ha detto la verità, quindi è un cavaliere, mentre è impossibile sapere cosa sia A)

Raymond Smullyan, *Qual è il titolo di questo libro?* Zanichelli

Introduciamo ora il vocabolario essenziale per una corretta interpretazione logica di enunciati e dimostrazioni.
Definizione: *linguaggio* è l'insieme delle parole che hanno senso compiuto costruite a partire dalle lettere dell'alfabeto.

Un linguaggio matematico utilizza un alfabeto particolare costituito da:

- simboli di costanti o di variabili individuali: a,b,c,…x,y,z,… (*nomi*)
- simboli di variabili o costanti enunciative: A, B,… (*proposizioni*)
- simboli di relazione P(.) Q(.)… (*predicati*)
- simboli logici: $\neg,\wedge,\vee,\Leftrightarrow,\Rightarrow$ (*connettivi logici*)
  $\forall$, $\exists$ (*quantificatori*)
- simboli ausiliari: simboli di punteggiatura, parentesi, operatori matematici…

Definizione: *proposizione* è un'espressione linguistica per la quale ha senso stabilire se è vera oppure falsa (a prescindere dal fatto che si sappia quale delle due circostanze si verifica).

Vi sono poi alcuni operatori, detti connettivi logici, che trasformano una o più proposizioni in altre.

Definizione: *connettivo* è un particolare elemento linguistico che collega due proposizioni.
A ciascuno di essi corrisponde una operazione elementare.

Quando si considerano più proposizioni simultaneamente può essere utile scrivere una tabella di verità, cioè una tabella in cui nelle colonne compaiono le diverse proposizioni e nelle righe vero o falso.

I principali connettivi logici sono:

- il connettivo ¬ indica la *negazione.*
  La proposizione ¬A indica la negazione dell'enunciato A ed è vera solo se A è falsa, cioè la sua tabella di verità è:

A	**¬A**
V	F
F	V

  Questo connettivo si legge "non" , anche se nel linguaggio naturale l'uso del non è talvolta diverso: per es "non ho visto nulla " non equivale a "ho visto qualcosa" come stabilirebbe invece la tabella vista; "non desidero partire" non è la negazione di "desidero partire", ma significa "desidero non partire".
  Talvolta il connettivo non invece che col simbolo ¬ si indica soprassegnando la proposizione che si vuole negare, come se indicassimo l'insieme complementare.

- il connettivo ∧ che indica la *congiunzione.*
  La proposizione A∧B indica la congiunzione degli enunciati A e B ed è vera solo se lo sono sia A che B.

A	**B**	**A∧B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

  Questo connettivo si legge "e" anche se non sempre nel linguaggio naturale la congiunzione "e" ha lo stesso significato: per es dire che la maglia dell'inter è nera e azzurra non significa cha la maglia dell'inter è nera e la maglia dell'inter è azzurra.

- Il connettivo ∨ indica la *disgiunzione.*
  La proposizione A∨B indica la disgiunzione degli enunciati A e B ed è vera se lo è almeno A oppure B.

A	**B**	**A∧B**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

  Questo connettivo si legge "o" , un o non esclusivo, nel senso che non è esclusa la possibilità che entrambe le proposizioni siano vere come ad esempio: "oggi scrivo o dormo" significa che posso fare o l'una o l'altra o entrambe le cose, la proposizione è falsa solo nel caso in cui non ne faccia nessuna delle due, cioè nel caso in cui "scrivo" "dormo" siano entrambe false.

  Un esempio di o esclusivo è invece: se lancio una moneta esce testa o croce, in questo caso si può avere o il primo evento o il secondo, ma non entrambi contemporaneamente, la proposizione è falsa sia nel caso in cui sia vero "esce testa" "esce croce", sia nel caso in cui entrambe siano false.

- Il connettivo → indica l' *implicazione.*
  La proposizione A→B traduce la forma se…allora…la sua tabella di verità è:

A	**B**	**A→B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

  Osserviamo in questo caso che la proposizione risulta falsa solo nel caso in cui da premessa vera si ottiene una conseguenza falsa, cioè se la premessa è vera necessariamente anche la conseguenza deve essere vera, mentre se la premessa è falsa la conseguenza può essere indifferentemente vera o falsa; ad esempio la proposizione "chi beve birra campa cent'anni" è falsa solo nel caso in cui essendo vera la premessa "bevo birra" è falsa la conseguenza "campo cent'anni".

- Il connettivo ←→ indica la *doppia implicazione.*
  La proposizione A←→B traduce la forma se e solo se, la sua tabella di verità è:

A	**B**	**A←→B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Come nell'algebra elementare, useremo le parentesi per indicare l'ordine in cui si compiono le varie operazioni, conveniamo comunque che l'operatore ¬ abbia la precedenza su tutti gli altri.

ESERCIZI

1. Dire quali delle seguenti sono delle proposizioni
   a. Roma è la capitale d'Italia
   b. Questo libro è bello
   c. Chiudi la finestra
   d. Dante ha scritto l'Eneide
   e. La miliardesima cifra di π è 5
   f. Domani pioverà
   g. Sono sicuro che piove
   h. Tizio sa che piove
   i. 2+(=
   j. 2+(= 0

   [sono proposizioni la a,d,e,j]

2. Con quali connettivi posso esprimere le seguenti proposizioni?
   a. Mario non gioca a calcio
   b. Mario gioca a calcio e a basket
   c. Mario gioca a calcio o a basket
   d. In questo momento Mario gioca a calcio o a basket
   e. Il computer è acceso o spento

   [a: ¬, b:∧, c:∨, d: è un o esclusivo se C corrisponde a "Mario gioca a calcio" e B a "Mario gioca a basket, si ha: (C∧¬B)∨(¬C∧B), e: anche questo è un o esclusivo, quindi…]

3. In che casi sono false le seguenti implicazioni?
    a. Se la cartina di tornasole è rossa allora la sostanza è acida
    b. Quando avrai imparato a cucinare verrò a cena
    c. Se sei saggio ridi
    d. Il cane abbaia se sente rumore
    e. Se la benzina finisce la macchina si ferma
    f. Se n è divisibile per 9 allora lo è anche per 3
    g. Se Mario è un violinista allora gli asini volano

    [ricordiamo che l'implicazione logica è falsa solo nel caso in cui da una premessa vera si ottiene una conseguenza falsa, quindi le proposizioni risultano false solo nei seguenti casi: a: la cartina di tornasole è rossa, la sostanza non è acida
    b: ho imparato a cucinare ma non sei venuto a cena
    c: sei saggio ma non ridi
    d: il cane sente rumore e non abbaia
    e: la benzina è finita e la macchina non si ferma
    f: n è divisibile per 9 ma non lo è per 3
    g: Mario è un violinista ma gli asini non volano

4. Dimostrare che la proposizione $A \to B$ equivale alla $\neg A \vee B$
    [Infatti la a tabella di verità di $\neg A \vee B$ è:

A	**B**	$\neg A$	$\neg A \vee B$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

che coincide con quella di $A \to B$. Osserviamo che la proposizione "se c'è il sole faccio una passeggiata" equivale infatti alla "o non c'è il sole oppure faccio una passeggiata"]

5. Nell'isola di Smullyan (dove ci sono i furfanti che mentono sempre e i cavalieri che dicono sempre la verità) si svolge il seguente dialogo tra A e B:
    A: Siamo entrambi furfanti
    B: Io mi chiamo Giuseppe e tu Andrea
    Che cosa si può dedurre?

[che B è un cavaliere e che la sua frase è vera, infatti sia un cavaliere che un furfante non diranno mai "io sono un furfante" così A ha mentito, quindi è un furfante, e ha mentito anche a proposito di B che è un cavaliere e che quindi ha detto la verità. Se lavoriamo con le tavole di verità si ha che:

A è un cavaliere	**B è un cavaliere**	**Siamo entrambi furfanti formalizzata è:**	**Io mi chiamo Giuseppe e tu Andrea**
V	V	$\neg A \wedge \neg B$ =F	V
V	F	$\neg A \wedge B$ = F	F
F	V	$\neg(A \wedge \neg B)$ = V	V
F	F	$\neg(\neg A \wedge \neg B)$=F	F

La riga che risolve l'es è quella colorata in rosso.]

6. Chiarire in ciascuna delle seguenti frasi il significato del connettivo “o”
   a. Nel prezzo è compresa la consumazione del formaggio o della frutta
   b. Se a è un numero intero non nullo o un numero positivo la potenza a^a è definita nell’insieme dei reali.
   c. Il prodotto $a \cdot b$ è nullo se e solo se $a = 0$ oppure $b = 0$
   [a: o esclusivo, b:o, c:o]

7. Un’ordinanza stabilisce che “se una persona parcheggia in via Milano allora viene multata”. In che caso l’ordinanza è falsa?
   [solo se A parcheggia e non viene multato, è vera se parcheggia e viene multato, ma anche se non parcheggia]

8. Angelo Bruno e Carlo sono tre studenti che hanno sostenuto un esame. Se A,B,C formalizzano rispettivamente le proposizioni “Angelo ha superato l’esame”, “Bruno ha superato l’esame”, “Carlo ha superato l’esame”, formalizzare le seguenti proposizioni:
   a. solo Carlo ha superato l’esame
   b. solo Angelo non ha superato l’esame
   c. Almeno uno tra Angelo Bruno e Carlo ha superato l’esame
   d. Almeno due tra Angelo Bruno e Carlo hanno superato l’esame
   e. Al più due tra Angelo Bruno e Carlo hanno superato l’esame
   f. Esattamente due tra Angelo Bruno e Carlo hanno superato l’esame

   [a. $C\wedge\neg A\wedge\neg B$
   b. $C\wedge B\wedge\neg A$
   c. $A\vee B\vee C$
   d. $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$
   e. $\neg A\vee\neg B\vee\neg C = \neg(A\wedge B\wedge C)$
   f. $(A\wedge B\wedge\neg C)\vee(A\wedge C\wedge\neg B)\vee(B\wedge C\wedge\neg A)$]

9. Angelo Bruno e Carlo sono gli unici tre membri di una commissione che vota una proposta. Se A,B,C formalizzano rispettivamente le proposizioni “Angelo ha votato a favore”, “Bruno ha votato a favore”, “Carlo ha votato a favore”, formalizzare le seguenti proposizioni:
   a. La votazione è stata unanime
   b. La proposta è passata a maggioranza
   c. La proposta ha avuto un numero dispari di voti favorevoli
   d. La proposta è stata respinta, ma non all’unanimità
   e. La proposta è stata respinta col voto contrario di Bruno

   [a. $C\wedge A\wedge B$
   b. $(A\wedge B)\vee(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$ (in questo è inclusa anche l’unanimità)
   c. $(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee(\neg A \wedge\neg B\wedge C)\vee(\neg A\vee B\vee\neg C)$
   d. $\neg B\wedge(\neg A\vee\neg C)$]

10. Due amici A e B sono seduti nel salotto di A. B domanda: ”quanti anni hanno i tuoi tre figli?”
    A: “il prodotto delle età è 36” (1)
    B: “non mi basta”
    A: “la somma delle età è il numero civico della casa di fronte
    B esce, guarda il numero, rientra e dice: “non mi basta ancora” (2)
    A: “Il maggiore ha gli occhi azzurri” (3)
    B: “ora so le loro età”

Quali sono?
[Le età sono 9,2,2
dalla prima informazione si ha che le età possibili sono

1	1	36	somma=38	
1	2	18	21	
1	3	12	16	
1	4	9	14	
1	6	6	13	*
2	2	9	13	*
2	3	6	11	
3	3	4	10	

dall'informazione 2 si ha che l'unica soluzione ambigua è (*), visto che il numero che da la somma delle età non è ancora sufficiente
dall'informazione 3 se vi è un maggiore la soluzione è 2,2,9]

11. Dimostrare che $\neg\neg P = P$.

12. Dimostrare che $\neg(P \vee Q)$ non è equivalente a $(\neg P) \vee (\neg Q)$
[infatti $\neg(P \vee Q)$ è equivalente a $(\neg P) \wedge (\neg Q)$]

Teoria in sintesi:

Un ragionamento si presenta come una sequenza finita di proposizioni. L'ultima proposizione di un ragionamento detta conclusione è preceduta solitamente da quindi (o espressioni analoghe), le altre proposizioni sono le premesse. L'ordine in cui si presentano le premesse è inessenziale.
Un ragionamento si distingue da una generica sequenza di proposizioni perché si propone di ricondurre la verità della conclusione a quella delle premesse.
Un ragionamento è corretto quando la conclusione è conseguenza logica dell'insieme delle premesse, ossia quando non può succedere che le premesse siano tutte vere e la conclusione falsa.

Tutti sono disposti a ritenere corretto il seguente ragionamento:

2 è pari o 3 è pari
3 non è pari
______________ (separiamo con una linea le premesse dalla conseguenza)
2 è pari

Esistono tipi di implicazione che rivestono notevole importanza nell'ambito delle deduzioni

Se chiamiamo	$\mathbf{A \to B}$	*implicazione diretta*
allora è:	$\mathbf{B \to A}$	*implicazione inversa*
	$\mathbf{\neg A \to \neg B}$	*implicazione contraria*
	$\mathbf{\neg B \to \neg A}$	*implicazione contronominale*

Proposizione: l'implicazione diretta e la contronominale assumono gli stessi valori di verità.
Infatti dalla tavola di verità si ha che:

A	**B**	$\mathbf{A \to B}$	$\mathbf{\neg B \to \neg A}$
V	V	V	V

V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Questa è una proprietà fondamentale: **$A \rightarrow B$** equivale a **$\neg B \rightarrow \neg A$** e non è altro che uno dei principi della dimostrazione per assurdo: provare che dall'ipotesi segue la tesi è lo stesso che provare che negando la tesi si ottiene che pure l'ipotesi è falsa.
Se dalla verità di una proposizione A si deduce la verità di una proposizione B si dice che l'implicazione $A \rightarrow B$ è dimostrata.
A tale proposizione ($A \rightarrow B$) si dà il nome di *teorema*, e in particolare A prende il nome di *ipotesi*, B di *tesi*.
La *dimostrazione* è l'insieme di passaggi logici che dall'ipotesi porta alla tesi.

Un teorema, essendo una proposizione, può essere vero o falso:
partendo da ipotesi A **vera** il teorema è:
è vero quando A (ipotesi) e B (tesi) sono vere,
è falso quando A (ipotesi) è vera e B (tesi) è falsa.
Le proprietà che si utilizzano nella dimostrazione di un teorema possono essere state assunte come vere (*assiomi*) oppure possono essere state precedentemente dimostrate.

Esempio:
Teorema: se non mi fermo a prendere il caffè e il treno arriva puntuale allora giungo al lavoro in orario.
Il treno arriva puntuale e non giungo al lavoro in orario, quindi mi sono fermato a prendere il caffè.
Le proposizioni contenute sono:
C: prendo il caffè
T: il treno arriva puntuale
O: arrivo in orario al lavoro
Nella prima parte del teorema c'è la premessa, che costituisce l'assioma da cui partire: se non mi fermo a prendere il caffè e il treno arriva puntuale allora giungo al lavoro in orario, $\neg C \wedge T \rightarrow O$.
L'enunciato del teorema è: il treno arriva puntuale e non giungo al lavoro in orario, quindi mi sono fermato a prendere il caffè, $T \wedge \neg O \rightarrow C$.
L'ipotesi è $T \wedge \neg O$.
La tesi C.
Separando la tesi posso scrivere anche:

$$\begin{array}{l} \neg C \wedge T \rightarrow O \\ T \wedge \neg O \\ \hline C \end{array}$$

Definizione: si chiama *lemma* un teorema il cui scopo è quello di facilitare la dimostrazione di altri teoremi più importanti

Definizione: si chiama *corollario* un teorema che consegue direttamente dalla dimostrazione di un altro teorema.

Considerato il teorema con ipotesi la proposizione A e tesi la proposizione B cioè: $A \rightarrow B$,
si dice che B è *condizione necessaria* per il verificarsi di A (si può dire anche A solo se B), mentre si dice che A è *condizione sufficiente* per il verificarsi di B (si può dire anche sa A allora B) .

Se poi vale:
$A \leftarrow\rightarrow B$
si dice che B è condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi di A (e anche A lo è per B).

<u>Esempi:</u>

- C. S. perché un'equazione di secondo grado abbia radici reali è che a e c siano discordi.
- C. S. perché $x \geq 3$ è che x sia multiplo di 3.
- C. N. perché un intero sia un quadrato è che la sua cifra delle unità appartenga all'insieme $\{0,1,4,5,6,9\}$.
- C. N. S. perché un'equazione di secondo grado abbia radici reali distinte è che il discriminante sia > 0

Osservazione: al posto di "se A allora B" si usano anche:
se A,B
B, se A
A solo se B
B supposto che A
A è condizione sufficiente per B
B è condizione necessaria per A
Solo se B, allora A.

Osservazione: il bicondizionale "A se e solo se B" equivale a:
se A allora B e se B allora A
condizione necessaria e sufficiente affinché A è B.

Osservazione: se A è condizione necessaria per B allora B è condizione sufficiente per A e viceversa.

Le condizioni necessarie vengono utilizzate come "test".
Le condizioni necessarie e sufficienti sono dette anche proprietà caratteristiche.
Le condizioni sufficienti prendono anche il nome di "criteri".

ESERCIZI

1. Formalizzare il seguente teorema: se esco allora compero il giornale; se non compero il giornale non ho da leggere. Leggo quindi sono uscito.
[dette E: esco, G: compero il giornale, L: leggo
gli assiomi che compaiono nella prima parte sono: $E \rightarrow G$, $\neg G \rightarrow \neg L$
il teorema è $L \rightarrow E$.
Separando la tesi dall'ipotesi posso anche scrivere:
$E \rightarrow G$
$\neg G \rightarrow \neg L$
L
____
E

Questo teorema è falso! Infatti da $\neg G \rightarrow \neg L$, passando alla contronominale, che è una proposizione equivalente si ha: $L \rightarrow G$ (leggo, ho comperato il giornale) ma non $L \rightarrow E$].

2. Completare ciascuno degli schemi di ragionamento seguenti:

a. $P \to Q$
$Q \to R$
P
____
………

b. $P \to Q$
$\neg Q$
____
………

c. $P \to Q$
$\neg P \to Q$
____
………

[a: R, b: $\neg$P (è la contronominale) c: Q (Q è sempre vera)

3. Considerati i due enunciati:
a: la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a 180°
b: un triangolo con tre lati uguali è equilatero
in cosa differiscono?
[a è un teorema e b una definizione]

Teoria in sintesi:

Se consideriamo proposizioni come: “tutti i numeri divisibili per 4 sono pari”, oppure “vi è un numero pari primo”, in esse vengono utilizzati dei *quantificatori*: “vi è un” in questo caso si può intendere come esiste ($\exists$) e “tutti”come per ogni ($\forall$).
Per formalizzare le proposizioni quantificate occorre introdurre delle lettere che stanno per individui generici;
Introduciamo allora il concetto di predicato;
Definizione: chiamiamo predicato ogni frase, contenente una o più variabili, che diviene proposizione quando viene specificato il valore delle variabili;
esempio: “nel luogo x sta piovendo”.

Un predicato può essere trasformato in proposizione anche usando i quantificatori;

esempi**: “**sta piovendo in ogni luogo”: $\forall x\ Px$;
“c’è un luogo dove sta piovendo” (nel senso che esiste un valore di x, almeno uno, ma non necessariamente uno solo, per cui Px è vera): $\exists x\ Px$;
se P = “essere numero primo” $\forall x\ Px$ significa che ogni numero x è primo,
mentre $\exists x\ Px$ significa che esiste un numero x che è primo;
per ogni numero x, se x è divisibile per 4, allora x è pari, in simboli diventa:
$\forall x(Px \to Qx)$ dove P indica essere divisibile per 4 e Q essere pari.

Notiamo che per negare una proposizione contenete quantificatori si ha:

- $\neg(\forall x\ Px)$ equivale a “non è vero che Px è sempre vera” cioè “esiste almeno un x per cui Px è falsa” cioè: $\exists x\ \neg Px$
- $\neg(\exists x\ Px)$ equivale a “non è vero che esiste un x per cui Px è vera” cioè “non esiste nessun x per cui Px è vera” cioè “per tutti gli x Px è falsa” cioè: $\forall x\ \neg Px$

ESERCIZI

1. Formalizzare le seguenti frasi:
   a. Vi è un numero pari primo;
   b. Tutti i numeri maggiori di 8 sono anche maggiori di 6;
   c. Per ogni numero ne esiste uno maggiore;
   d. Se due numeri hanno lo stesso successore allora sono uguali;
   e. Anche nel Sahara qualche volta piove;
   f. In ogni luogo c’è qualche giorno in cui piove;
   g. C’è un giorno in cui piove dappertutto;

   [a: esiste un numero x tale che x è pari, x è primo : $\exists x(Px \wedge Qx)$
   b: tutti i numeri x se sono maggiori di 8 allora sono maggiori di 6:$\forall x(Px \rightarrow Qx)$
   c: per ogni numero x esiste un numero y tale che y>x : $\forall x\ \exists y\ y>x$
   d: per ogni numero x e per ogni numero y se sucessore di x=successore di y allora x=y:
   $\forall x\ \forall y(S(x)=S(y)) \rightarrow x=y$
   e: esiste un giorno x in cui nel Sahara piove: $\exists x$ Px-Sahara
   f: per ogni luogo x esiste qualche giorno y in cui piove: $\forall x\ \exists y\ Pxy$
   g: esiste un giorno y in cui in ogni luogo x piove: $\exists y\ \forall x\ Pxy$

2. Che differenza c’è tra le scritture $\forall x\ \exists y\ (x+y=0)$ e $\exists x\ \forall y\ (x+y=0)$?
   [$\forall x\ \exists y\ (x+y=0)$ significa che preso un qualsiasi x esiste un y tale che x+y=0; y dipende dalla scelta di x
   $\exists x\ \forall y\ (x+y=0)$ significa che esiste un x per ogni y, cioè x è lo stesso per tutti gli y
   è come dire per ogni uomo esiste un padre, oppure esiste un padre che è lo stesso per ogni uomo]

3. Se Pxy è “l’uomo x osserva la stella y” scrivere:
   a. $\forall x\ Pxy$
   b. $\forall y\ \exists x\ Pxy$
   c. $\exists x\ \forall y\ Pxy$
   d. $\exists y\ \forall x\ Pxy$
   e. $\forall x\ \exists y\ Pxy$

   [a : tutti gli uomini osservano la stella y
   b: per ogni stella esiste un uomo che la osserva
   c: esiste un uomo che osserva ogni stella
   d: esiste una stella osservata da tutti gli uomini]

4. Se Px è “x è un cavallo” e Qx “x è bianco” scrivere $\neg(\forall x\ Px \rightarrow Qx)$
   [non tutti i cavalli sono bianchi, il che equivale a dire che esiste un cavallo che non è bianco, cioè: $\exists x\ (Px \wedge \neg Qx)$].

5. Precisare che quantificatore è indicato con l’articolo “**un**” nelle seguenti frasi:
   a. **un** quadrato è anche un rombo
   b. due rette si dicono sghembe se non giacciono su **uno** stesso piano
   c. **un** numero reale positivo ammette sempre **una** radice quadrata

   [a: $\forall$

b: non $\exists$ uno stesso piano
c: $\forall$numero positivo $\exists$ la sua radice quadrata]

6. Stabilisci se le seguenti scritture sono equivalenti
   a. $\exists x\ Ax \wedge \exists x\ Bx$ $\qquad \exists x\ (Ax \wedge Bx)$
   b. $\forall x\ Ax \vee \forall x\ Bx$ $\qquad \forall x\ (Ax \vee Bx)$
   c. $\forall x\ Ax \wedge \forall x\ Bx$ $\qquad \forall x\ (Ax \wedge Bx)$

[a: no basta per es A = pari B= dispari
b: no basta per es A=pari B=primo
c: si]

7. Stabilisci se il seguente ragionamento è corretto dopo averlo formalizzato:
   ip1: tutti amano chi ama qualcuno
   ip2: Alessandro non ama se stesso
   tesi: Alessandro non ama Bea
   [V, infatti se uno ama qualcuno è amato da tutti, anche da sé stesso…..]

CAPITOLO 1

DIVISIBILITA’

Teoria in sintesi

- Saper scomporre in fattori un polinomio è un’operazione utile in quelle stesse situazioni in cui serve saper scomporre un numero: semplificare una frazione, sommare due frazioni, calcolare il MCD e mcm. Si tratta di frazioni algebriche anziché numeriche. Scomporre in fattori vuol dire scrivere un’espressione (numerica o letterale) sotto forma di prodotto. Tuttavia non esiste un metodo generale per scomporre in fattori un polinomio.

- Per dividere un polinomio per un monomio si dividono tutti i termini del polinomio per il monomio; quindi si sommano i singoli quozienti ottenuti. Per la divisione tra due polinomi, il secondo dei quali non sia un monomio, dovremo seguire altre regole. Ci occuperemo per il momento unicamente di polinomi contenenti una sola variabile, usualmente indicata con x. Indicheremo i polinomi dei quali tratteremo con lettere maiuscole, seguite da una parentesi nella quale è racchiusa la lettera x. Per esempio potremo indicare con A(x) un polinomio funzione della variabile x, indicheremo poi con A(1), A(-3), e così via i valori che tale polinomio assume per x = -1, x = -3 ….

- Facciamo presente che per i polinomi vale il seguente principio, detto *principio di identità dei polinomi*, al quale dovremo far riferimento quando illustreremo come si calcola in una determinata particolare situazione, il resto della divisione tra due polinomi.

- **Principio di identità dei polinomi**: due polinomi A(x) e B(x), nella stessa variabile x, si dicono IDENTICI se e solo se assumono valori uguali per ogni valore attribuito ad x.

Si ha che:
condizione necessaria e sufficiente affinché due polinomi siano identici è che siano uguali i coefficienti delle potenze delle variabili aventi lo stesso esponente.
Detto $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ *e* $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$ *, si ha*
$A(x) = B(x)$ *se e solo se* $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2, \ldots . a_n = b_n$.

Enunciamo ora, senza dimostrarlo, un importante teorema relativo all’esistenza e unicità del quoziente e del resto tra due dati polinomi A(x) e B(x).

Se A(x) e B(x) sono due polinomi nella lettera x, di grado rispettivamente n e m (con m >0 e n ≥ m) allora esistono e sono unici, due polinomi Q(x) e R(x) tali che:
A(x) = B(x) Q(x) + R(x)
dove Q(x) ha grado n – m e R(x) ha grado minore di m.
Il polinomio Q(x) è detto quoziente e R(x) è detto resto della divisione tra A(x) e B(x).

- I valori che sostituiti in un polinomio *P(x)* lo rendono uguale a zero si chiamano **zeri del polinomio**.

- Vogliamo ora enunciare una regola (detta di Ruffini) che ci permette di eseguire molto più rapidamente la divisione tra due polinomi nel caso particolare in cui il polinomio divisore sia di grado 1 ed il coefficiente del suo termine di primo grado sia 1, ossia nel caso in cui il divisore sia un binomio del tipo $x + a$ dove a rappresenta un qualsiasi numero reale.

Il quoziente tra un polinomio A(x), di grado n, ordinato secondo le potenze descrescenti di x e scritto in forma completa, ed il binomio B(x) = x + a, è un polinomio di grado n – 1, anch'esso ordinato rispetto alle potenze descrescenti di x. I coefficienti dei suoi singoli termini si trovano nel seguente modo: il primo coefficiente è uguale al primo coefficiente del dividendo; tutti gli altri si ottengono moltiplicando il precedente per –a e aggiungendo al prodotto ottenuto il corrispondente coefficiente del dividendo di ugual posto. Il prodotto dell'ultimo coefficiente del quoziente per – a, aggiunto al termine di grado zero di A(x) dà il resto della divisione.

- Scomporre in fattori $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x + 4$.

Cerchiamo tutti i divisori del tipo x – a con a intero. I valori da assegnare ad a sono i divisori del termine di grado zero, ossia +4. Quindi i possibili divisori sono: x –1 ; x +1; x - 2; x + 2; x – 4; x + 4. Per verificare se uno di questi è un divisore di P(x), applichiamo il teorema del resto, ricordando che il resto nella divisione per x – a è R = P(a).
P(1) = 1 –2 –2 + 4 = 1: perciò il polinomio non è divisibile per x –1
P(2) = 8 – 8 – 4 +4 = 0: quindi il polinomio è divisibile per x –2.
Eseguiamo ora la divisione: $(x^3 - 2x^2 - 2x + 4) : (x - 2)$

	1	-2	-2	4
2		2	0	-4
	1	0	-2	0

Perciò $(x^3 - 2x^2 - 2x + 4) = (x - 2)(x^2 - 2) = (x - 2)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

- Se un numero intero è uno zero di un polinomio a coefficienti interi, allora è un divisore del termine di grado zero del polinomio.

Il resto della divisione tra il polinomio A(x) ed il binomio x + a è il valore che assume il polinomio A(x) attribuendo alla variabile x il valore – a. La condizione necessaria e sufficiente, perché il polinomio A(x) sia divisibile per il binomio x + a è che sia A(-a) = 0.

- Si chiama **frazione algebrica** una frazione il cui numeratore e denominatore sono espressioni algebriche. In simboli, se con *A(x)* e *B*(x) indichiamo due polinomi, una frazione algebrica ha la forma $\frac{A(x)}{B(x)}$.

DIVISIONE FRA POLINOMI

Per dividere un polinomio P(x) per un altro polinomio D(x):

a. si ordinano i due polinomi secondo le potenze decrescenti di x. Se il polinomio dividendo è incompleto, si introducono i termini mancanti con coefficiente nullo.
b. Si divide il primo termine di P(x) per il primo termine di D(x); il quoziente è il primo termine del polinomio quoziente Q(x).
c. Si moltiplica questo primo termine per il divisore e lo si sottrae dal dividendo. Si ottiene il primo resto parziale.
d. Si procede di nuovo come dal primo punto considerando come dividendo il resto parziale. Si ripete l'algoritmo finché si ottiene un resto parziale di grado inferiore a quello del divisore.
e. Se il resto è zero, allora P(x) è divisibile per D(x).

OSSERVAZIONE: il grado del polinomio quoziente è uguale alla differenza tra i gradi del dividendo e del divisore. Il resto è un polinomio di grado inferiore a quello del polinomio divisore.

Esempi

- Esegui la seguente divisione: $\frac{x^3}{x^2+3}$ (1)

x^3	$x^2 + 3$
	x
$-x^3 - 3x$	
-- $- 3x$	

L'espressione (1) si può scrivere nella forma: $\frac{x^3}{x^2+3} = x - \frac{3x}{x^2+3}$

- Esegui la seguente divisione: $(x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 3): (x - 6)$ (2)

$x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 3$	$x - 6$
	$x^3 - 3x^2 + 7$
$-x^4 + 6x^3$	
-- $-3x^3 + 18x^2 + 7x - 3$	
$+3x^3 - 18x^2$	
-- -- $7x - 3$	
$- 7x + 42$	
-- 39	

L'espressione (2) può essere scritta nella forma:

$(x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 3): (x - 6) = x^3 - 3x^2 + 7 + \frac{39}{x-6}$.

TEOREMA DEL RESTO

Il teorema del resto ci fornisce un metodo per ottenere, in alcuni casi, un divisore; è possibile utilizzare poi l'algoritmo di Ruffini per eseguire la divisione, determinare il quoziente e quindi scomporre in fattori il polinomio di partenza. Se il quoziente è a sua volta scomponibile, si può procedere di nuovo con il teorema del resto o con uno dei metodi già noti per scomporre in fattori.

ESERCIZI

- Senza eseguire l'operazione, calcolare il resto della seguente divisione:
  $(x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 38) : (x - 6)$.

  Se $P(x) = (x^4 - 9x^3 + 18x^2 + 7x - 38)$ per il teorema del resto è sufficiente calcolare $P(6) = 6^4 - 9\ 6^3 + 18\ 6^2 + 7\ 6 - 38 = 1296 - 1944 + 648 + 42 - 38 = 4$. Quindi il resto della divisione di P(x) per $x - 6$ è 4.

- Senza eseguire l'operazione, calcolare il resto della seguente divisione:
  $(3x^4 + x + 5x^2 - 5x^3 - 2): (3x - 2)$

  Il dividendo non è nella forma $(x \pm k)$. Dividendo il polinomio assegnato, che chiamo P(x), per $(3x - 2)$ otteniamo:
  $P(x) = Q(x)\ (3x - 2) + R$
  Se al posto di x sostituiamo 2/3, otteniamo:
  $P(2/3) = Q(2/3)\ 0 + R = R$. Quindi per trovare il resto R dobbiamo sostituire ad x il valore 2/3, cioè il valore per cui $3x - 2 = 0$.
  $P(2/3) = 3\ 16/81 - 5\ 8/27 + 5\ 4/9 + 2/3 - 2 = 0$. Il resto $R = 0$.

OSSERVAZIONE: si ricorda che il teorema del resto è applicabile qualora il divisore sia un binomio di primo grado.

- Scomporre in fattori $P(x) = 2x^3 - 3x - 1$.

Cerchiamo tutti i divisori del tipo $x - a$ con a intero. I valori da assegnare ad a sono i divisori del termine di grado zero, ossia -1. Quindi i possibili divisori sono: $x - 1$; $x + 1$. Per verificare se uno di questi è un divisore di P(x), applichiamo il teorema del resto, ricordando che il resto nella divisione per $x - a$ è $R = P(a)$.
$P(1) = 2 - 3 - 1 = -2 \neq 0$: perciò il polinomio non è divisibile per $x - 1$
$P(-1) = -2 + 3 - 1 = 0$: quindi il polinomio è divisibile per $x + 1$.
Eseguiamo ora la divisione: $(2x^3 - 3x - 1) : (x + 1)$

	2	0	-3	-1
-1		-2	2	1
	2	-2	-1	0

Perciò $2x^3 - 3x - 1 = (x + 1)(2x^2 - 2x - 1)$.
Il trinomio di secondo grado è a sua volta scomponibile, ricercando le soluzioni x_1 e x_2, in $a(x-x_1)(x-x_2)$.

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Eseguire la seguente divisione: $(2/3\, a^3 + 2a^2 - a^4 + 1) : (a^3 - 2)$
2. Dopo aver trovato un divisore con il teorema del resto, scomporre in fattori i seguenti polinomi utilizzando la regola di Ruffini:
   a. $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$
   b. $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$
3. Fattorizzare:
   a. $x^6 - a^6$ con a reale assegnato.
   b. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - y^3$
   c. $(2x-1)^2 - 4x^2 + 1 + (4x-2)(x+2)$

SOLUZIONI

1. $Q(x) = -a + 2/3 \quad R(x) = 2a^2 - 2a + 7/3$
2. a. $(x + 2)(x + 3)(x - 2)(x^2 + 4)$
b. $2(x-1)(x-5)(x + 3/2)$
3.a. $(x - a)(x + a)(x^2 - ax + a^2)(x^2 + ax + a^2)$
b. $(x - 1 - y)(x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 1)$
c. $2(2x - 1)(x + 1)$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. La scomposizione di $3(x + 1)(x - 1) + (x+1)^2 + x + 1$ è:
a. $(x+1)(4x-1)$
b. $2(x+1)(2x - 1)$
c. $(x+1)(4x+1)$
d. $2(x+1)(2x-1) + x+1$ [a]

2. E' data l'espressione $x^2 + 1 - 2x + 2ax - 2a$. Quale proposizione è vera?
a. il polinomio non è scomponibile

b. il polinomio può essere scomposto come (x-1)(x+1+2a)
c. il polinomio può essere scomposto come (x-1)(x-1+2a)
d. il polinomio può essere scomposto come (x-1)(x-1+a) [c]

3. Un polinomio P di grado n viene scomposto in fattori: P = AB. Siano p e q i gradi dei polinomi A e B. Allora:
a. $p+q < n$
b. $p+q = n$
c. $p=1$ e $q=1$
d. $pq= n$ [b]

4. Quale valore di k va assegnato affinché il polinomio P(x) sia divisibile per il binomio D(x), con $P(x) = x^3 -6x^2 +kx +4$ e $D(x) = x -4$?
a. 7/3
b. 2/3
c. 14/3
d. 28/5 [c]

5. Applicando il teorema di Ruffini, la divisione del polinomio P(x) per il binomio A(x) dà come quoziente: ($P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 2x +1$ $A(x) = x-1$)
a. $x^3 + x -1$
b. $x -x^3 + 1$
c. $x^2 - x +1$
d. $x^3 +x +1$
[a]

6.Qual è il resto di $(2x^4 -2x +12 x^3 -1) : (x^2-1)$, senza eseguire la divisione?
a. 11
b. –14
c. non si può calcolare visto che il binomio divisore è di grado superiore al primo
d. 0 [c]

7. Applicando l'algoritmo della divisione, $(x^4 +3x^2 -4) : (x^2-4)$ dà come quoziente:
a. $x^2 -7$
b. $x^4 +2x^2 -1$
c. $x^3-2x +2$
d. x^2+1 [d]

8. La fattorizzazione di $x^2 -1 -2(x^2 +4x+3)$ utilizzando i prodotti notevoli è data da:
a. $(x+1)(-x + 9)$
b. $-(x+1)(x+7)$
c. $-(x+1)(x+9)$
d. $(x+1)(-x-3)$ [b]

9. La scomposizione di $x^2 - 4x +4 -16a^4$ utilizzando i prodotti notevoli è data da:
a. $(x - 2 + 2a)(x - 2-2a)$
b. $(x -2 - 4a)(x -2 + 4a)$
c. $(x -2 - 4a^2)(x -2 + 4a^2)$
d. $(x -2 -a) (x -2 +a)$ [c]

10. Applicando il teorema del resto e quello di Ruffini, per quali valori di n possiamo dire che il binomio $a^n - b^n$ è divisibile per $a +b$?
a. se e solo se n è pari
b. se e solo se n è multiplo di 5
c. se e solo se n è dispari
d. se e solo se n è multiplo di 11 [a]

APPENDICE

- Un polinomio *P(x)* si può scomporre in fattori se esistono due polinomi *A(x)* e *B(x)* tali che *P(x) = A(x) B(x)*. I metodi utilizzati, oltre a quelli indicati, possono essere:

a. **raccoglimento a fattor comune** (totale o parziale)
b. **uso dei prodotti notevoli**.

Si ricordano i **prodotti notevoli fondamentali**:

- $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
- $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$
- $(A \pm B)^3 = A^3 \pm 3AB^2 + 3AB^2 \pm B^3$
- $A^3 \pm B^3 = (A \pm B)(A^2 \mp AB + B^2)$

OSSERVAZIONE: in generale, se un trinomio di secondo grado ha la forma $x^2 + sx + p$, dove s e p sono rispettivamente la somma ed il prodotto di due numeri x_1 e x_2, esso si può fattorizzare in $(x-x_1)\ (x-x_2)$.

- Analizziamo alcune *espressioni letterali per "scoprire"* proprietà dei numeri: consideriamo i quadrati dei numeri naturali:0,1, 4, 9, 16, 25,…..e così via; se calcoliamo la differenza fra i quadrati di due numeri successivi, otteniamo:

$$1 - 0 = 1$$
$$4 - 1 = 3$$
$$9 - 4 = 5$$
$$16 - 9 = 7$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

cioè i numeri dispari. Attraverso il calcolo letterale possiamo controllare che ciò è vero in generale. Sia infatti n un qualunque numero naturale e $n + 1$ il suo successivo.
La differenza tra i quadrati del successivo di un numero ed il numero stesso :

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

è un'espressione che rappresenta tutti i numeri dispari.
Consideriamo ora i cubi dei numeri naturali: 0,1, 8, 27, 64,…… Ci chiediamo se valgono le stesse considerazioni precedenti. Esaminiamo alcuni casi particolari:

$$1 - 0 = 1$$
$$8 - 1 = 7$$
$$27 - 8 = 19$$
$$64 - 27 = 37$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

In generale si ha: $(n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$.
E' difficile leggere nell'espressione ottenuta se il numero rappresentato è pari o dispari. Scriviamo allora $3n^2 + 3n + 1 = 3n\,(n+1) + 1$.
Si ha che:

a. se n è pari, allora $3n$ è pari, $n+1$ dispari, $3n(n+1)$ è pari, $3n(n+1) +1$ è dispari
b. se n è dispari, allora $3n$ è dispari, $n+1$ è pari, $3n(n+1)$ è pari, $3n(n+1) +1$ è dispari.

Abbiamo dunque verificato che anche la differenza tra i cubi di due numeri successivi è sempre dispari. Essa rappresenta però solo numeri dispari, non tutti i numeri dispari.

CAPITOLO 2

COORDINATE CARTESIANE E GEOMETRIA ANALITICA

Teoria in sintesi

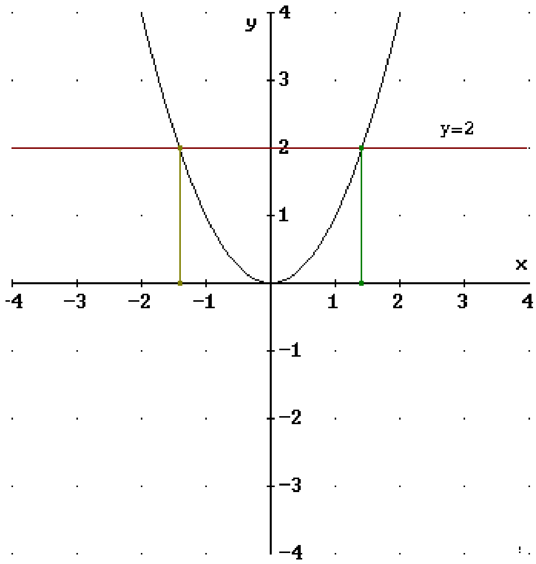
- Dati due insiemi non vuoti A e B, si chiama *funzione di A in B* una legge che fa corrispondere ad ogni elemento x di A, uno ed un solo elemento y di B.
- Se indichiamo con *f* la funzione di A in B (in simboli f:A→B), con y l'elemento di B che la funzione *f* associa all'elemento x di A, allora y=f(x) cioè y è l'immagine di x tramite *f*

Esempi

Sono funzioni :

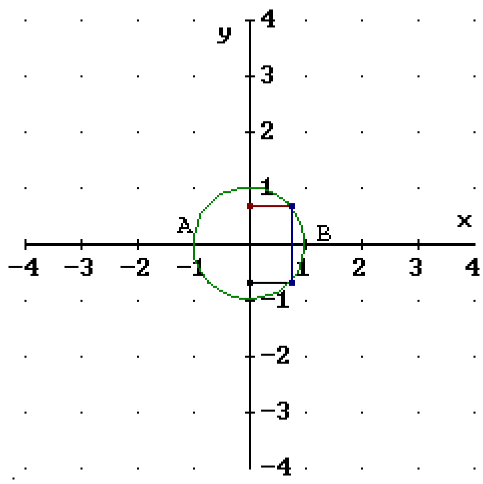
1. $f(x)=x+1$ f: Z → Z (in questo caso l'insieme A=Z e l'insieme B=Z)
f associa ad ogni numero intero il suo successivo. Ogni x in Z ha una ed una sola immagine y in Z e dunque la legge data è una funzione.

2. $f(x)= x^2$ f: R→R *f* associa ad ogni numero reale il suo quadrato. Si tratta di una funzione poiché ogni numero reale x ha una ed una sola immagine y in R. In questo esempio due numeri reali x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$ possono avere la stessa immagine y; pensiamo ad $x_1=1$ ed $x_2=-1$ per i quali $f(1)=1$ ed $f(-1)=1$, oppure $x_1=2$ ed $x_2=-2$ per i quali $f(2)=4$ ed $f(-2)=4$ e così per ogni coppia di numeri reali costituita da un numero e dal suo opposto.Graficamente :



le rette y=k con k>0 intersecano la parabola in due punti x_1 ed x_2 distinti (nel grafico riportato sopra y=2, $x_1=-\sqrt{2}$ ed $x_2=\sqrt{2}$)

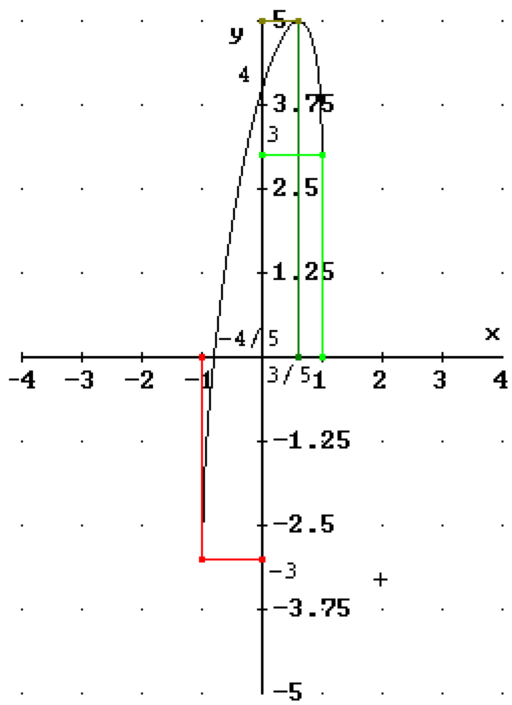
3. Sia A l'insieme dei punti del diametro AB di una circonferenza e B l'insieme dei punti della circonferenza stessa. La legge che associa ad ogni punto x di A i corrispondenti valori y di B non è una funzione poiché ogni x in A ha due immagini y ed y' in B.



Qualche richiamo sulla lettura dei grafici .

Riportiamo ora qualche esempio di lettura ed interpretazione dei grafici cartesiani di funzioni,che potrà essere utile in seguito.

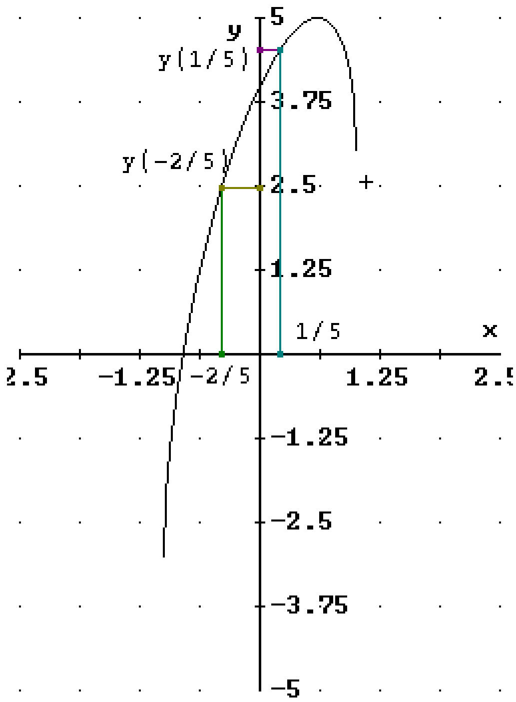
a. Data la funzione:



dal grafico si può osservare che:

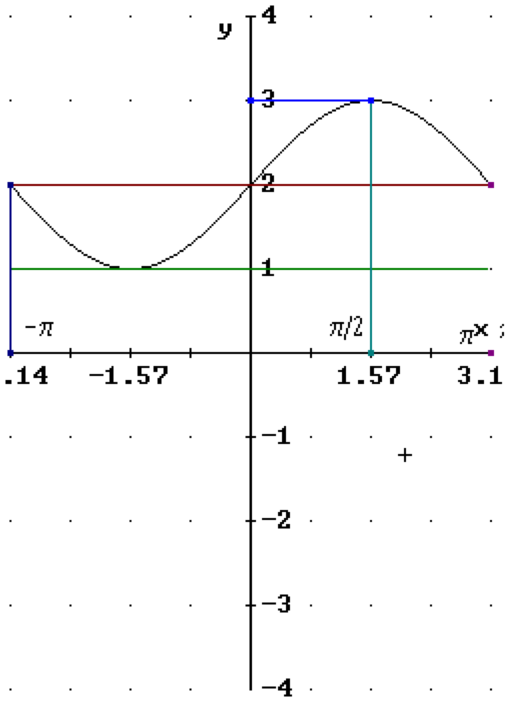
- L'insieme A di definizione di $f(x)$ è A={x∈R : -1≤x≤1}
- L'insieme B delle immagini di A è B={y∈R : -3≤y≤5}
- $f(x)\leq 5$ per ogni x∈A
- $f(-1)=-3$ cioè l'immagine di x=-1 è y=-3, ovvero la funzione assume in x=-1 il valore y=-3
- $f(1)=3$ cioè l'immagine di x=1 èy=3, ovvero la funzione assume in x=-1 il valore y=3

- $f(-4/5)=0$, cioè la funzione si annulla (interseca l'asse x) per $x=-4/5$
- $y(0)=f(0)=4$, cioè la funzione interseca l'asse y in $y=4$
- la funzione è positiva, cioè il suo grafico sta nel semipiano delle y positive (corrispondente al primo e secondo quadrante del piano cartesiano), per $-4/5<x<1$, è negativa per $-1<x<-4/5$
- $y(-2/5)<y(1/5)$:



- $f(x)\leq 2.5$ per $x\leq -2/5$

b. Data la funzione:

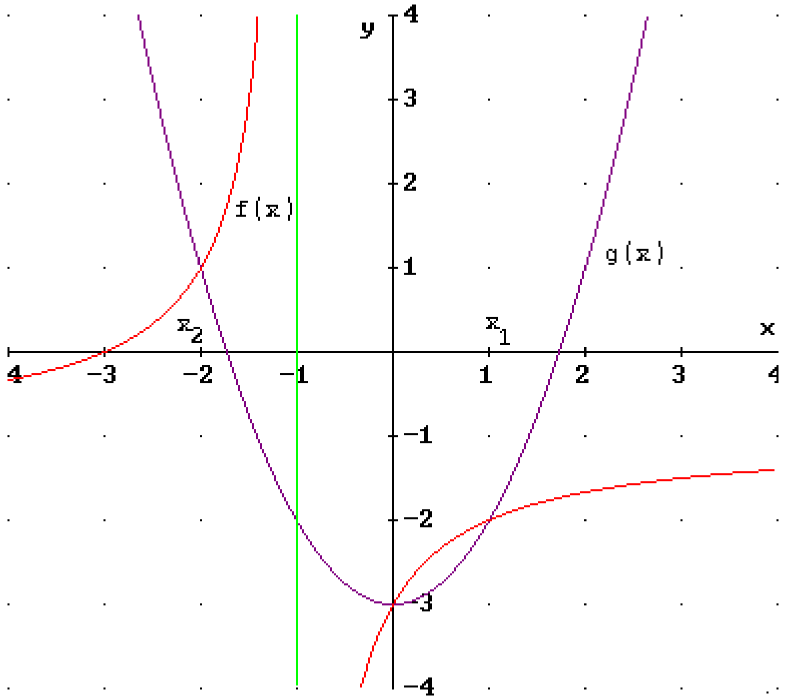


- $1 \leq f(x) \leq 3$ per ogni $-\pi \leq x \leq \pi$. Dunque la funzione è *limitata* nel suo insieme di definizione
  $A=\{x \in R : -\pi \leq x \leq \pi\}$
- $1 \leq f(x) \leq 2$ per $-\pi \leq x \leq 0$
- $2 \leq f(x) \leq 3$ per $0 \leq x \leq \pi$
- $f(0)=2$
- $f(\pi/2)>f(\pi)$ anche se $\pi/2<\pi$

c. Date le funzioni : $f(x)=\dfrac{-x-3}{x+1}$ e $g(x)=x^2-3$

- Vediamo se il punto di coordinate A(2,1) appartiene ad *f(x)* o a *g(x)*. Per farlo sostituiamo le coordinate del punto nell'equazione di *f(x)* e di *g(x)*.
  $f(2)=-5/3 \neq 1$ e dunque A non appartiene alla funzione poiché le sue coordinate non soddisfano l'equazione. A appartiene a $g(x)$: infatti $g(2)=1$.

- I grafici delle due funzioni date sono:



- Se indichiamo con x_1 ed x_2 le ascisse dei punti di intersezione tra le due curve, possiamo osservare che:
- $f(x) < g(x)$ per $x<x_2 \vee -1<x<0 \vee .x>x_1$.
- $f(x) > g(x)$ per $x_2<x<-1 \vee 0<x<x_1$

- *f(x)* e *g(x)* hanno tre intersezioni di ascisse: x_1 (positiva), x_2 (negativa), $x=0$ cioè: $f(x)=g(x)$ per $x=x_1$, $x=0$, $x=x_2$

GEOMETRIA ANALITICA

EQUAZIONE DELLA RETTA

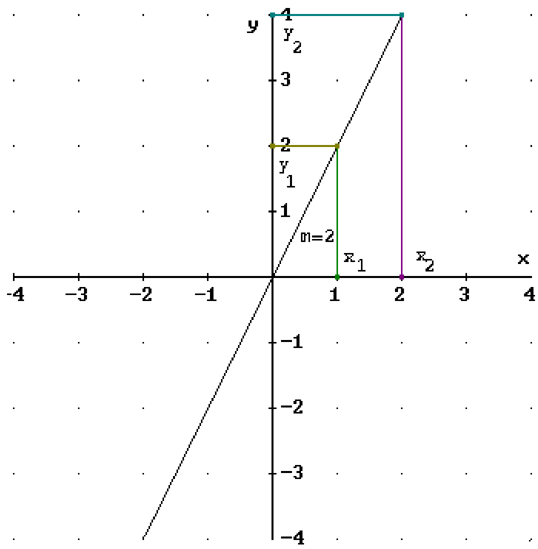
Teoria in sintesi

- Dati due punti A e B nel piano, essi individuano (univocamente) una retta.
- La retta è rappresentata da un'equazione di primo grado in due variabili:

  (*) $ax+by+c=0$ con a,b,c numeri reali
  che è detta *equazione generale* della retta.

  Tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione (*) cioè le soluzioni dell'equazione, sono i punti del piano appartenenti alla retta

- Nell'equazione (*) notate il diverso significato che assumono le lettere a,b,c (*parametri o costanti*) ed x,y (*variabili*)
- Ogni equazione del tipo : $y=mx+q$ rappresenta una retta (*equazione esplicita della retta*). m è detto *coefficiente angolare* , $m=-a/b$, mentre q è l'*ordinata all'origine* (l'ordinata del punto in cui la retta incontra l'asse y)
- Dati due punti $A(x_1,y_1)$ e $B(x_2,y_2)$, $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ con $x_2 \neq x_1$



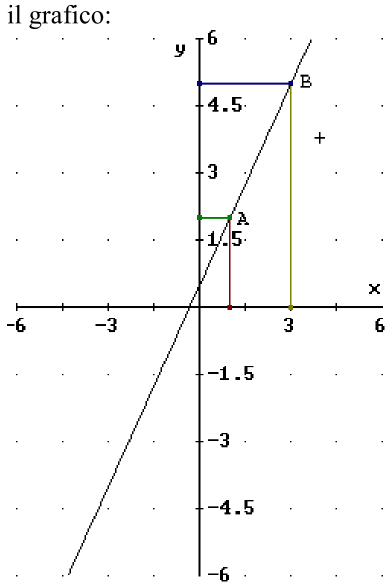
- Se m=0 l'equazione y=q rappresenta una retta parallela all'asse x (che coincide con l'asse x nel caso q=0)
- Le rette parallele all'asse y non sono rappresentate nell'equazione in forma esplicita
- L'equazione: $y-y_0=m(x-x_0)$ è l'equazione di una *famiglia di rette di centro P* cioè rappresenta tutte le rette (tranne quella parallela all'asse y) che passano per il punto $P(x_0,y_0)$

Esempi

1.*Grafico della retta*

Tracciare nel piano cartesiano il grafico della retta: 3x-2y+1=0

- Cerchiamo due punti appartenenti alla retta, cioè due punti che siano soluzione dell'equazione data. Si sceglie un valore di x (ad es. x=1) e, sostituendo nell'equazione si trova il corrispondente valore di y (y=2)
- Ripetiamo l'operazione con un secondo valore di x e calcoliamo il corrispondente valore di y. x=3, y=5
- A questo punto tracciamo il grafico:



2.Stabilire quali dei seguenti punti appartengono alla retta: y=2x-1

- A(1,1).
  Appartiene alla retta data perché sostituendo le sue coordinate nell'equazione si ottiene 1=2-1 e dunque A la soddisfa
- B(-2,3)
  Non appartiene perché sostituendo le sue coordinate nell'equazione si ottiene 3=-4-1 e dunque B non la soddisfa

3.Scrivere l'equazione della retta passante per A(-3,1) e B(2,-2)

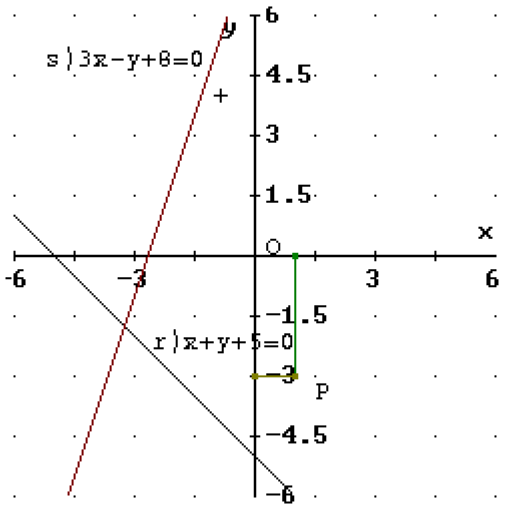
- $m = \frac{-2-1}{2+3} = \frac{-3}{5}$
- per calcolare q, sostituiamo il coefficiente angolare trovato e le coordinate di uno dei due punti dati nell'equazione y=mx+q : $-2 = \frac{-6}{5} + q$ da cui si ottiene q=-4/5
- la retta cercata è : y=(-3/5)x-4/5
- allo stesso risultato si poteva arrivare utilizzando la formula della retta passante per due punti (vedi appendice): $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x-x_2}$ che applicata nel nostro caso ci porta all'equazione.
  $\frac{y-1}{-2-1} = \frac{x+3}{2+3}$, cioè 5y+3x+4=0

4.Dire se i punti O(0,0) e P(1,-3) stanno dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alle rette r)x+y+5=0 ed s)3x-y+8=0

- La retta r individua due semipiani : uno dato dall'insieme dei punti del piano per cui risulta x+y+5>0, l'altro dai punti per cui x+y+5<0 (la retta r è individuata dai punti per cui x+y+5=0)
- La retta s individua i due semipiani: 3x-y+8>0 e 3x-y+8<0
- Sostituendo le coordinate dei punti dati nelle disuguaglianze precedenti, si ottiene:

O(0,0): 0+0+5>0 vera
P(1,-3) 1-3+5>0 vera
Dunque P ed O stanno dalla stessa parte rispetto alla retta r.
Analogamente per s si trova:
O(0,0) 0+0+8>0 vera
P(1,-3) 3+3+8>0 vera. Dunque P ed O stanno dalla stessa parte anche rispetto ad s

Verifichiamolo graficamente:

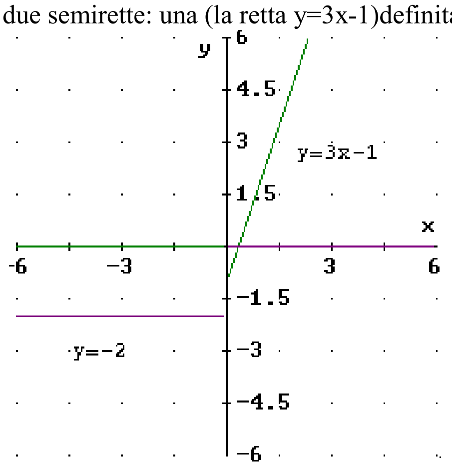


5.La funzione f(x) è data dalla legge:

$$f(x)=\begin{cases}3x-1 & per \quad x>0\\ -2 & per \quad x<0\end{cases}$$

Tracciarne il grafico

- Si tratta di disegnare due semirette: una (la retta y=3x-1)definita per x>0 , l'altra (la retta y=-2) per x<0



- La funzione è definita su tutto l'asse reale esclusa l'origine

6.Scrivere l'equazione della famiglia di rette di centro P(-2,4)

- L'equazione avrà la forma: $y-y_0=m(x-x_0)$. Nel nostro caso: y-4=m(x+2)
  Cioè y=mx+2m+4

Osservazione

Le infinite rette di equazione y=mx+q con m fissato, rappresentano al variare di q la famiglia delle rette parallele alla retta passante per l'origine di equazione y=mx.

Ad es. l'equazione y=4x+q rappresenta la famiglia di rette parallele alla retta per l'origine y=4x

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

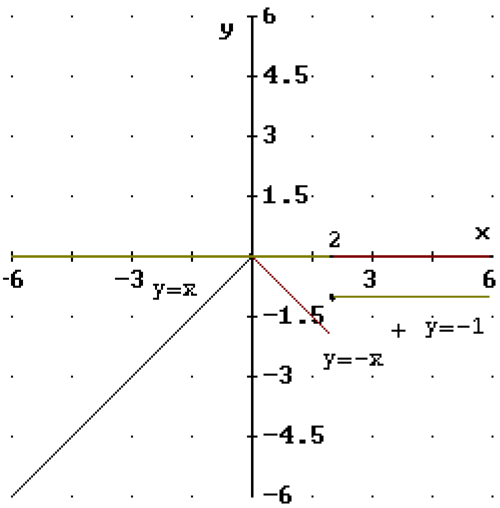
1) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti: A(-1,2) e B(3,-1)
2) Scrivere l'equazione della retta passante per i punti: A(1,6) e B(1,23)

3) Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = \begin{cases} x & per \quad x \le 0 \\ -x & per \quad 0 < x < 2 \\ -1 & per \quad x \ge 2 \end{cases}$

4) Scrivere l'equazione del fascio di rette di centro P(1/2,-7)
5) Riconoscere tra le seguenti equazioni quali rappresentano una famiglia di rette passanti per un punto e quali una famiglia di rette parallele ad una retta per l'origine:
   a. 3x+5y+k=0
   b. 2y+3mx-m=0
   c. –4y+hx+2=0
   d. kx+ky-2k+3=0 con k≠0

SOLUZIONI

1) 3x+4y-5=0
2) x=1
3)



4) y+7=m(x-1/2)
5) a . rette parallele a y=(-3/5)x
   b . 2y=-m(3x-1),famiglia di rette con centro P(1/3,0)
   c : 2(2y-1)=hx, famiglia di rette con centro P(0,1/2)
   d y=-x+2k-3, rette parallele a y=-x

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1.Scrivere le equazioni delle rette passanti per i punti A(1/3,2) e B(-2,-4/5) [6x-5y+8=0]
2.Scrivere le equazioni delle rette passanti per i punti A(0,0) e B(3,-2) [y=(-2/3)x]
3.Nel fascio di rette parallele alla retta 3x+2y=0, determinare l'equazione della retta che passa per P(1,-5) [3x+2y+7=0]
4.Scrivere l'equazione della famiglia di rette di centro A(-1,1) e determinare la retta passante per B(0,2) [x-y+2=0]

5.Dire se i punti O(0,0) e P(1,-3) stanno dalla stessa parte o da parti opposte rispetto alle rette:
r)2x-y+5=0, s) x-3y-5=0, t) 10x+24y+15=0 [dalla stessa parte solo rispetto ad r]

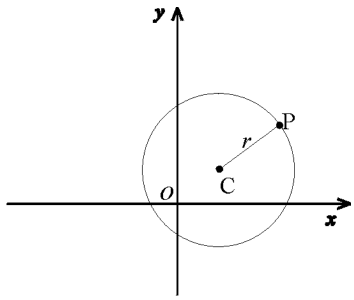
LE CONICHE: CIRCONFERENZA, PARABOLA,ELLISSE, IPERBOLE

Teoria in sintesi

Queste curve si chiamano *coniche* perché sono ottenute tramite l'intersezione di una superficie conica con un piano.
Si possono definire tutte come luoghi geometrici e, di conseguenza, ricavarne l'equazione algebrica che le rappresenta nel piano cartesiano.
Lo vedremo come esempio per la circonferenza.

LA CIRCONFERENZA

- La *circonferenza* è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto *C*, detto *centro*.
- Si ottiene tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse.
- La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è il *raggio* della circonferenza.



- Note le *coordinate del centro C* $(\alpha;\beta)$ e la *misura r del raggio*, *l'equazione della circonferenza* è allora

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad \text{(equazione canonica)}$$

- Svolgendo i calcoli nell'equazione precedente si ottiene:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0 \qquad (*)$$

  dove $a=-2\alpha$, $b=-2\beta$, $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$ (e dunque $r^2=(a^2/4)+(b^2/4)-c$)
- Assegnata un'equazione di secondo grado in cui i coefficienti di x^2 e di y^2 sono uguali tra loro, non è detto che essa rappresenti sempre una circonferenza. Infatti l'equazione (*) rappresenta una circonferenza solo se $(a^2/4)+(b^2/4)-c>0$ cioè se il quadrato del raggio è positivo

Esempi

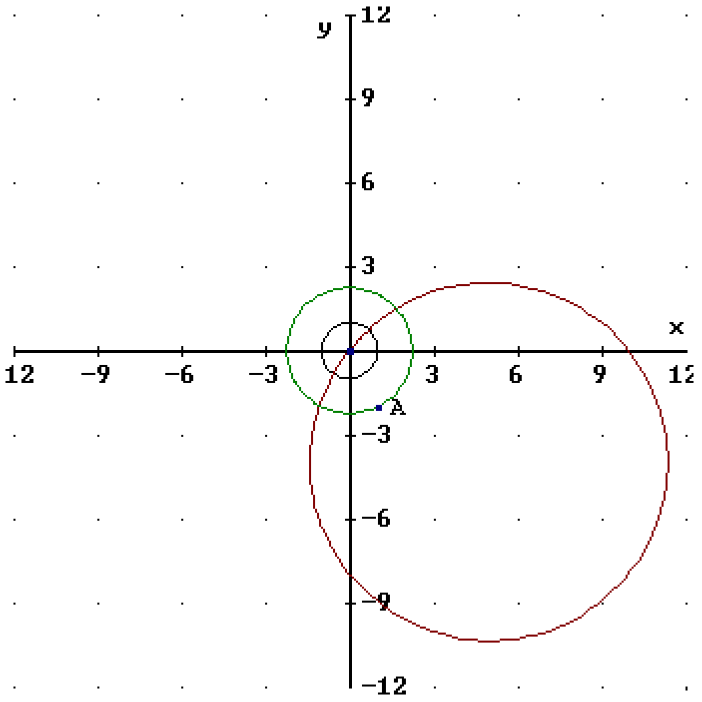
1.Determinare l'equazione della circonferenza di centro C(2,-1) e raggio r=3
- Utilizzando l'equazione canonica della circonferenza, possiamo scrivere: $(x-2)^2+(y+1)^2=9$, che è l'equazione richiesta

2.Dire se le seguenti equazioni rappresentano o no delle circonferenze ed in caso affermativo determinare centro e raggio:
- $x^2+y^2-8x+6y=0$. Calcoliamo il centro C(4,-3) ed il raggio $r^2=16+9=25>0$ e quindi l'equazione data è una circonferenza di centro C e raggio 5
- $x^2+y^2+10x-4y+29=0$ Calcoliamo il centro C(-5,2) ed il raggio $r^2= 25+4-29=0$ e quindi l'equazione data non rappresenta una circonferenza
- $x^2+y^2-2x+y+9=0$ Calcoliamo il centro C(1,-1/2) ed il raggio $r^2=1+1/4-9<0$ e quindi non è una circonferenza
- $2x^2+3y^2-2x+3y-1=0$. Non è una circonferenza perché i coefficienti di x^2 e di y^2 non sono uguali
- $4x^2+4y^2+25y=0$. Per poter calcolare il centro ed il raggio dividiamo l'equazione per 4 ed otteniamo: $x^2+y^2+(25/4)y=0$ da cui C(-25/8,0) ed $r^2=(-25/8)^2$ cioè r=25/8

3.Stabilire se il punto A(1,-2) è interno o esterno alle circonferenze:

- $x^2+y^2=1$. Il punto A è esterno alla circonferenza data se $x^2_1+y^2_1>1$, interno se $x^2_1+y^2_1<1$ quando sostituiamo al posto di x_1 ed y_1 le coordinate di A. Nel nostro caso risulta $1+4>1$ e dunque A è esterno alla circonferenza
- $x^2+y^2-10x+8y=0$. Come nel caso precedente, sostituendo le coordinate di A nella circonferenza, otteniamo $1+4-10-16<0$ e dunque il punto è interno alla circonferenza data
- $x^2+y^2=5$. In questo caso : $1+4=5$ e quindi il punto sta sulla circonferenza.

Graficamente i tre casi precedenti si rappresentano:



TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1.Stabilire quali delle seguenti equazioni rappresentano delle circonferenze:

a. $x^2+y^2-2x+4y+7=0$
b. $2x^2+2y^2-x+5y-1=0$
c. $x^2+y^2-2x=0$

2.Determinare la circonferenza avente centro C(-1,-1/2) ed r=3/2

3.Stabilire se il punto A(1,-2) appartiene oppure no alla circonferenza $x^2+y^2+2x-4y+1=0$. In caso negativo stabilire se è interno o esterno

SOLUZIONI

1.

a. no.
b. C(1/4,-5/4) ed r=√34/4
c. C(1,0) ed r=1

2. $x^2+y^2+2x+y-1=0$

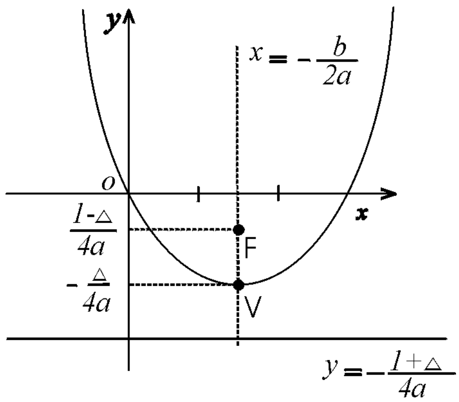
3.E' esterno

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. per quali valori di h parametro reale, l'equazione $x^2+y^2-2x+hy+h=0$ rappresenta una circonferenza? Scelto uno di tali valori, determinare centro e raggio
   [h≠2; per h=2 C(1,-1) e raggio nullo]
2. determinare la circonferenza avente come diametro il segmento AB con A(2,-6) e B(-4,2). *(suggerimento: il punto medio del segmento AB è il centro della circonferenza ed il raggio è dato dal segmento CA o dal segmento CB)*
   [$x^2+y^2+2x+4y-20=0$]
3. scrivere l'equazione della circonferenza che passa per l'origine ed ha centro in C(6,-8) [$(x-6)^2+(y+8)^2=100$]

LA PARABOLA

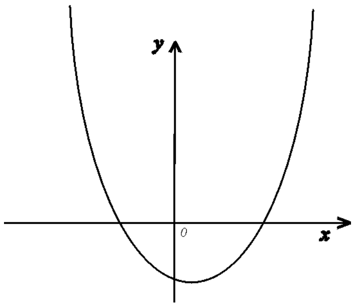
La *parabola* è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (*direttrice*) e da un punto (*fuoco*). La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama *asse* della parabola.
L'asse della parabola è un asse di simmetria e interseca la parabola nel *vertice*.
Una *parabola con asse parallelo all'asse y* è rappresentata da un'equazione del tipo



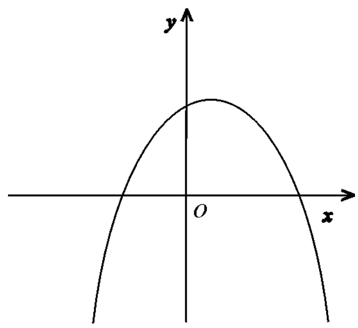
$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{(con } a\neq 0\text{)}.$$

Concavità e apertura della parabola dipendono dal parametro *a*.

$a > 0$



$a < 0$



<u>**Esercizi**</u>

1.Trovare le coordinate del vertice, dell'asse di simmetria , della direttrice, del fuoco delle parabole:

- $y=x^2-x-12$. Per trovare il vertice calcoliamo l'ascissa x=-b/2a, che nel nostro caso assume il valore x=1/2 e l'ordinata $y=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{49}{4}$. L'asse di simmetria avrà allora equazione x=1/2, il fuoco coordinate x=1/2 e $y=\frac{1-\Delta}{4a}=-12$, la direttrice $y=-\frac{1+\Delta}{4a}=-\frac{25}{2}$
- $y=x^2-4x+3$ $\qquad V(2,-1)$, $F(2,-\frac{3}{4})$, x=2 è l'equazione dell'asse, y=-5/4 quella della direttrice

Per l'**ellisse** e l'**iperbole** richiamiamo solo brevemente la forma delle loro equazioni, e le relazioni che legano le coordinate dei punti caratteristici per la loro determinazione come luoghi geometrici.

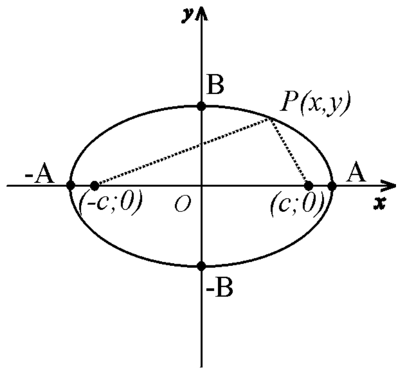
L'ELLISSE

E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*

- Equazione dell'ellisse riferita al centro degli assi cartesiani e con i fuochi sull'asse x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

centro *O(0,0)*
fuochi $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, essendo
$c^2 = a^2 - b^2$
vertici *A(a,0)*, *B(b,0)*, *-A, -B*
$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$



N.B.: L'eccentricità *e* indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse: $0 \le e < 1$.

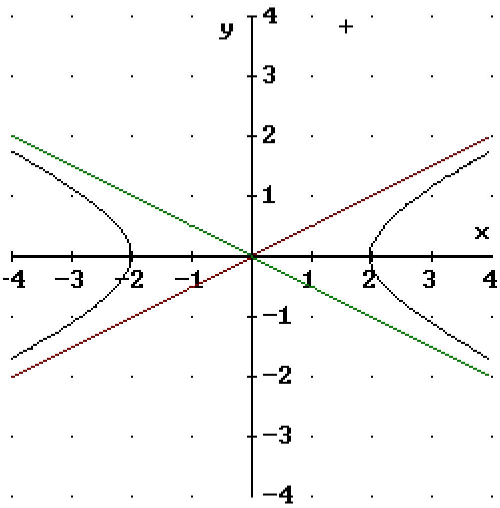
IPERBOLE

E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti *fuochi*

- Equazione dell'iperbole riferita al centro degli assi cartesiani e con i fuochi sull'asse x

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

dove $b^2=a^2-c^2$, *a* e *b* sono il semiasse maggiore e minore rispettivamente, i fuochi hanno coordinate $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ ed asintoti le rette di equazioni $y = \pm\frac{b}{a}x$. Il grafico di un'iperbole con i fuochi sull'asse x è del tipo:



L'eccentricità dell'iperbole è data dal rapporto : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$. Nell'iperbole e>1

APPENDICE

Riportiamo di seguito alcune formule di geometria analitica che può essere utile ricordare.

LA RETTA

1.*Rette particolari*

- Se a=0 la retta è parallela all'asse x ed ha equazione : by+c=0 (retta orizzontale)
- Se b=0 la retta è parallela all'asse y ed ha equazione : ax+c=0(retta verticale)
- Se c=0 la retta passa per l'origine

2.*Condizione di allineamento di tre punti*. Dati tre punti $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ che abbiano ascisse diverse, sono allineati se e solo se: $\frac{y_2-y_1}{y_3-y_1}=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$

3.*Retta per due punti* . Dati due punti $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ con $x_1 \neq x_2$ ed $y_1 \neq y_2$, allora la retta che passa per A e B ha equazione: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

4.*Equazioni delle bisettrici degli assi cartesiani*. Bisettrice del primo e terzo quadrante : y=x
Bisettrice del secondo e quarto quadrante: y=-x

5.*Rette parallele*. Due rette di equazioni y=mx+q e y=m'x+q' sono parallele se m=m'. Se le rette sono nella forma ax+by+c=0 e a'x+b'y+c'=0, sono parallele se ab'=a'b

6.*Rette perpendicolari*. . Due rette di equazioni y=mx+q e y=m'x+q' sono perpendicolari se mm'=-1 Se le rette sono nella forma ax+by+c=0 e a'x+b'y+c'=0, sono perpendicolari se aa'+bb'=0

7.*Distanza di un punto da una retta*. La distanza di un punto $P(x_0,y_0)$ dalla retta r è data da:

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{oppure} \quad d=\frac{|y_0-mx_0-q|}{\sqrt{m^2+1}}$$

a seconda che la retta sia scritta in forma implicita o in forma esplicita

LA CIRCONFERENZA

1.*Si segnalano i seguenti casi particolari dell'equazione* $x^2+y^2+ax+by+c=0$

a=0, il centro appartiene all'asse y:
b=0, il centro appartiene all'asse x;
c=0, la circonferenza passa per l'origine degli assi.

2.*Determinazione dell'equazione della circonferenza*. Per determinare l'equazione di una circonferenza è necessario determinare i tre parametri (*a, b, c*) dell'equazione generale di una circonferenza.
Ad esempio citiamo i seguenti casi:

- sono note le coordinate del centro e il raggio;
- sono note le coordinate degli estremi di un diametro;
- la circonferenza passa per un punto e sono note le coordinate del centro;
- la circonferenza passa per tre punti non allineati;
- la circonferenza passa per due punti e il centro appartiene a una retta nota;
- sono note le coordinate del centro e la circonferenza è tangente a una retta nota.

Vediamo un esempio per chiarire le idee.

Esempio

Determinare l'equazione della circonferenza che passa per A(0,3), B(-4,1), C(1,1).
Si parte dall'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e si impone che sia soddisfatta dalle coordinate dei tre punti dati. Si ottiene allora il sistema: $\begin{cases} 9+3b+c=0 \\ 16+1-4a+b+c=0 \\ 1+1+a+b+c=0 \end{cases}$ che come soluzioni ha i valori $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

la circonferenza ha equazione. $x^2+y^2+3x+-2y-3=0$

3.*Rette secanti*, *tangenti* o *esterne ad una circonferenza*
Dato il sistema formato dall'equazione della circonferenza e da quella della retta

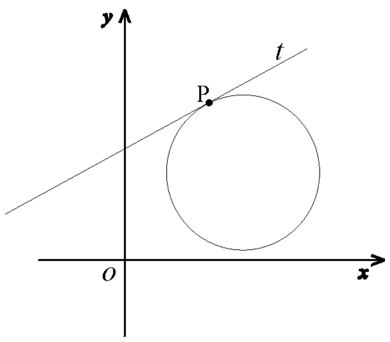
$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

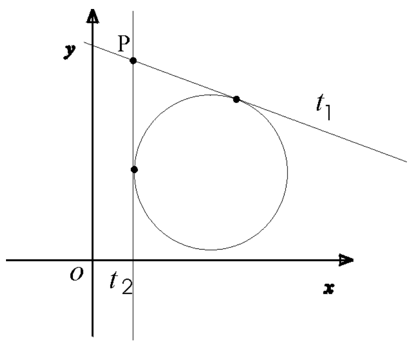
nell'equazione di secondo grado che risolve il sistema (ricavando una delle due variabili in funzione dell'altra nella seconda equazione), abbiamo allora le tre possibilità alternative:

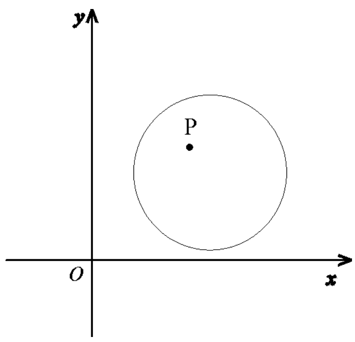
- $\Delta > 0$, la retta è *secante*;
- $\Delta = 0$, la retta è *tangente*;
- $\Delta < 0$, la retta è *esterna*.

Dato un punto $P(x_0;y_0)$ e una circonferenza di equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$, nella ricerca delle *tangenti* condotte dal un punto P alla circonferenza, si possono presentare tre casi.

- *P* è esterno alla circonferenza, le *rette per P tangenti alla circonferenza sono due*;
- *P* appartiene alla circonferenza, la *retta tangente è una sola*;
- *P* è interno alla circonferenza, *non esistono rette tangenti* uscenti da *P*.







Per determinare le equazioni delle eventuali *rette tangenti*, si possono seguire due metodi.

I METODO

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

- si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e la circonferenza:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = y_0 + m(x - x_0) \\ x^2 + (y_0 + m(x - x_0))^2 + \ldots \end{cases}$$

- con il metodo di sostituzione si ottiene quindi un'equazione di secondo grado nella variabile *x*;
- si impone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$;
- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a *m*;
  se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due e il punto *P* è esterno alla circonferenza;
  se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una sola e il punto *P* appartiene alla circonferenza;
  se $m_1, m_2 \notin \mathbf{R}$, non esistono rette tangenti e il punto *P* è interno alla circonferenza;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di *m* nell'equazione del fascio di rette.

N.B.: E' sempre conveniente controllare graficamente i risultati ottenuti…!

Esempio

Scrivere l'equazione delle rette passanti per *P(0,-4)* e tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$.
L'equazione della retta generica passante per *P* è:

$$y - (-4) = m(x - 0)$$

intersecando con la circonferenza otteniamo

$$\begin{cases} y = mx - 4 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} y = mx - 4 \\ x^2(1 + m^2) - 8mx + 12 = 0 \end{cases}$$

imponendo $\frac{\Delta}{4} = 0$ si ottiene

$$\frac{\Delta}{4} = (4m)^2 - 12(1 + m^2) = 0$$

che ci dà coefficiente angolare delle rette tangenti $m = \pm\sqrt{3}$.

Le due rette quindi sono:

$$y = \pm\sqrt{3}x - 4$$

II METODO

- si determinano le coordinate del centro *C* e del raggio *r* della circonferenza;
- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

cioè

$$mx - y + y_0 - mx_0 = 0;$$

- si applica la formula della distanza fra le rette e il centro *C*;
- si pone tale distanza uguale al raggio e si risolve l'equazione in *m*;
- si sostituisce il valore o i valori trovati di m nell'equazione del fascio di rette.

Attenzione: Se il punto *P* appartiene alla circonferenza, allora la retta tangente è semplicemente la retta per *P* perpendicolare a *PC*.
4.*Intersezione tra due circonferenze*
Due circonferenze possono essere *secanti* in due punti, *tangenti* in uno stesso punto (esternamente o internamente), *una interna all'altra, concentriche o esterne.*

Per determinare gli eventuali punti di intersezione o il punto di tangenza, occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due circonferenze.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

E' conveniente risolvere il sistema con il metodo di riduzione.
Sottraendo le due equazioni, si ottiene infatti l'equazione di primo grado

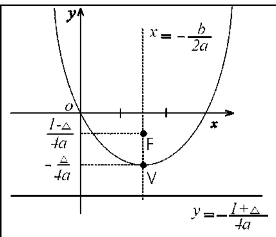
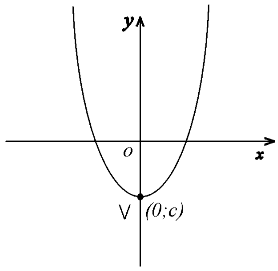
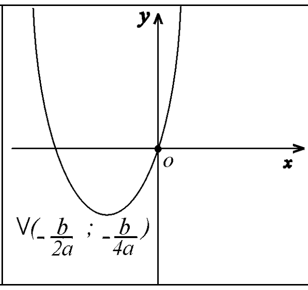
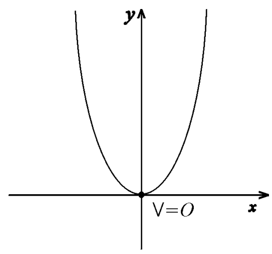
$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

che *è l'asse radicale*, nella quale si potrà ricavare *x* in funzione di *y* (per esempio) e sostituirla poi in una delle due equazioni della circonferenza.

PARABOLA

1.*Riassumiamo alcune caratteristiche della parabola nel seguente schema*.
Per i casi particolari (*b=0; c=0; b=c=0*) lo studente è invitato a completare lo schema riassuntivo.

PARABOLE				
Equazione	$y = ax^2 + bx + c$	$y = ax^2 + c(b = 0)$	$y = ax^2 + bx(c = 0)$	$y = ax^2(b = c = 0)$
Asse	$x = -\frac{b}{2a}$	*x*=?	*x*=?	*x*=?
Vertice	$V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$	*V* ?	*V* ?	*V=O* (perché?)
Fuoco	$F = \left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$	*F* ?	*F* ?	*F* ?
Direttrice	$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$	*y*= ?	*y*= ?	*y*= ?

<table>
<tr>
<td>Figure</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

2.<u>*Equazione di una parabola con asse parallelo all'asse*</u> *x*.E' del tipo

$$x = ay^2 + by + c \qquad \text{(con } a\neq 0\text{).}$$

dove *a, b, c* sono coefficienti reali e $a\neq 0$.

3.<u>*Determinazione dell'equazione della parabola.*</u>Anche nell'equazione della parabola (come in quella della circonferenza) $y = ax^2 + bx + c$ (o $x = ay^2 + by + c$) sono presenti i tre coefficienti *a, b* e *c*. Per poterli determinare occorrono in genere *tre condizioni*.
Alcune possibili condizioni sono le seguenti:

- sono note le coordinate del vertice e del fuoco;
- sono note le coordinate del vertice (o del fuoco) e l'equazione della direttrice;
- la parabola passa per tre punti non allineati;
- la parabola passa per due punti e si conosce l'equazione dell'asse;
- la parabola passa per un punto e sono note le coordinate del vertice (o del fuoco);
- la parabola passa per un punto e sono note le coordinate dell'asse e della direttrice.

Vediamo un esempio:
<u>Esempio</u>
Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che ha vertice in V(1,2) e passa per il punto A(2,1)
Considero l'equazione $y=ax^2+bx+c$ ed impongo che soddisfi le condizioni date:

$$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}=2 \end{cases}$$ da cui si ricava $$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ b=-2a \\ 4ac-b^2=8a \end{cases}$$ sostituendo il valore di b nelle altre due equazioni : $$\begin{cases} 4a-4a+c=1 \\ b=-2a \\ 4ac-4a^2=8a \end{cases}$$ da cui $$\begin{cases} c=1 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases}$$ (attenzione! $a\neq 0$ nell'equazione della parabola)

4.<u>*Tangenti ad una parabola*</u>
Le *rette tangenti a una parabola*, uscenti da un punto $P(x_0, y_0)$, possono essere due, una o nessuna.
Per determinare le equazioni delle eventuali *rette passanti per* $P(x_0, y_0)$ *e tangenti alla parabola*, si procede nel seguente modo:

- si scrive l'equazione del fascio di rette passanti per $P(x_0, y_0)$,

$$y - y_0 = m(x - x_0);$$

- si scrive il sistema fra le equazioni del fascio e della parabola:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

- si perviene all'equazione di secondo grado in *x*:

$$ax^2 + (b - m)x + (c + mx_0 - y_0) = 0;$$

- si calcola Δ:

$$\Delta = (b - m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0);$$

- si pone la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$:

$$(b - m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0) = 0 \text{, ossia } m^2 - 2m(b + 2ax_0) + (b^2 - 4ac + 4ay_0) = 0;$$

- si risolve l'equazione di secondo grado rispetto a *m*:

  - se $m_1 \neq m_2$, le rette tangenti sono due ed il punto P è esterno alla parabola
  - se $m_1 = m_2$, la retta tangente è una sola e il punto *P* appartiene alla parabola;
  - l'equazione non ha soluzioni ed il punto P è interno alla parabola

- se si trova il valore (o i valori) di m, si sostituisce nell'equazione del fascio di rette determinando così le equazioni delle rette tangenti.

CAPITOLO 3

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ALGEBRICHE

Teoria in sintesi

- Un insieme di numeri e lettere collegati da operazioni da eseguire su di essi costituiscono un'*espressione*. Le lettere che compaiono in un'espressione possono avere due diversi significati: possono essere *costanti* (ed indicate con *a,b,c,…*), o *variabili* (ed indicate con x,y,z,..)
- Si ha un' *uguaglianza* tra due espressioni quando esse sono identicamente uguali per qualsiasi valore delle variabili che vi compaiono e per cui esse hanno significato. Ad esempio sono uguaglianze le seguenti:
  1. $\frac{(x-1)^2}{(x-1)} = (x-1) \qquad per\ x \neq 1$
  2. $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} \qquad per\ x > 2$
- Un'*equazione* è un'uguaglianza tra due espressioni verificata solo per alcuni valori delle variabili che vi compaiono

- Risolvere un'equazione significa determinare l'*insieme delle soluzioni S*, ossia l'insieme di quei particolari valori che, assegnati alle variabili soddisfano l'equazione trasformandola in uguaglianza

- Si dice **grado** di un'equazione algebrica razionale intera (e cioè un'equazione in cui compaiono solo operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione ed in cui le incognite non compaiono a denominatore) rispetto ad un'incognita, il grado massimo con cui compare l'incognita

- Due equazioni sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme delle soluzioni

EQUAZIONI LINEARI

Sono equazioni algebriche di primo grado che possono essere scritte nella forma:

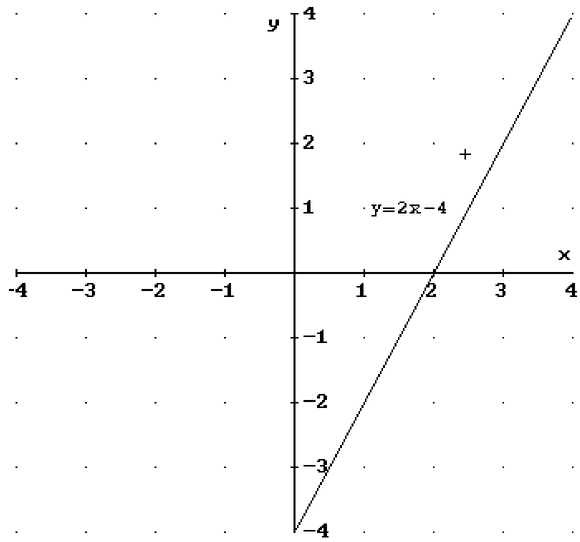
$$ax+b=0 \qquad \text{con } a,b\in\Re$$

detta **forma canonica o normale**

L'equazione lineare può essere classificata in tre modi diversi a seconda dei valori di a e b

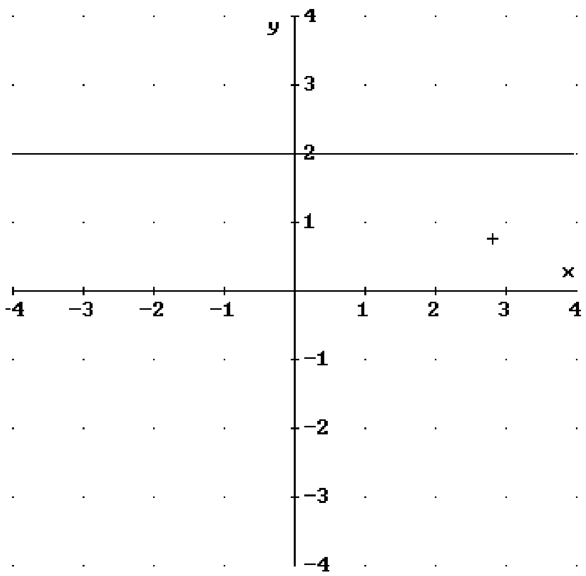
1. $a\in\Re_0$ (cioe' a appartiene all'insieme dei numeri reali senza lo zero), l'equazione e' *determinata* ed ammette la soluzione $x = -\frac{b}{a}$
2. se a=0 e $b\in\Re_0$ l'equazione e' *impossibile*, cioè non ammette soluzioni
3. se a=0 e b=0 l'equazione ha come soluzione qualsiasi valore reale di x

Nel caso in cui l'equazione risulti determinata, trovarne la soluzione significa calcolare l'ascissa del punto in cui la retta y=ax+b incontra l'asse x:



in questo caso la soluzione è x=2

- Nel caso in cui l'equazione risulti **impossibile**, la retta y=b non ha alcuna intersezione con l'asse x , essa è infatti parallela all'asse delle ascisse:



- Nel caso in cui l'equazione risulti verificata da qualsiasi valore reale di x, la retta che la rappresenta coincide con l'asse delle ascisse (y=0)

<u>Esempi</u>

<u>Equazione determinata</u>

- $\frac{3}{2}x-1=5x-\frac{9}{2}x+1$ facendo il m.c.m. si ottiene :
- $3x-2=10x-9x+2$ che, in forma normale e' equivalente a:

- $2x-4=0$ che ha come unica soluzione
- $x=2$

Equazione impossibile

- 3x-4=2x+x+1 che, in forma normale è equivalente a:
- 0x-5=0 che non ha alcuna soluzione

Equazione che ha come soluzione qualsiasi valore reale di x

- $\frac{3}{2}x-1=6x-\frac{9}{2}x-1$ facendo il m.c.m. si ottiene:
- $3x-2=12x-9x-2$ che, in forma normale è equivalente a:
- 0x+0=0 soddisfatta da ogni valore reale di x

Discussione di un'equazione letterale

- $kx-b=-3(1+2x)$ Risolviamo l'equazione rispetto all'incognita x e discutiamola

Portiamola in forma normale:

- $kx-b=-3-6x$
- $kx+6x=b-3$
- $x(k+6)=b-3$

Discutiamo l'equazione, cioè studiamo al variare dei parametri k,b, la risolubilità dell'equazione

- se k=-6 e b≠3 l'equazione è impossibile : in questo caso infatti si ha 0x=b-3≠0
- se k=-6 e b=3 l'equazione è un'identità (e quindi l'insieme delle soluzioni è $\Re$) : in questo caso infatti si ha 0x=0
- se k≠-6 l'equazione ammette l'unica soluzione $x=\frac{b-3}{k+6}$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Risolvere le equazioni:

1. $3(1-x)-(x+2)=-2(3x-1)-(x+1)$
2. $4(y-2)+y-3=7(y-1)-2(y+2)$
3. $(x-3)^3-(x-2)^2(x-1)=2-(x-2)^2$
4. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-3x-\frac{1}{2}(x-4)=(x-2)^2-\frac{3}{4}(x+5)$
5. Discutere e risolvere l'equazione:
$$4bx-(b+a)x=(b-a)(x+1)$$

SOLUZIONI:

1. x=0
2. $\forall x\in\Re$
3. impossibile
4. x=-6/5
5. $se\, b\neq 0 \quad x=\frac{b-a}{2b}$; $se\ b=0\ e\ a=0\ \forall x\in\Re$; $se\ a\neq 0\ e\ b=0\ impossibile$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. $(3x+5)^2+(3x+1)(3x-1)-2x(x+4)=(4x+1)^2$ [-23/14]
2. $3(x-1)+2-\left(\frac{x-2}{3}-\left(x-\frac{x-1}{3}\right)\right)=0$ [0]
3. $(a-3)x=a^2-9+b(a-3)$ [a≠3 x=a+b+3; se a=3 $\forall x\in\Re$]
4. $2x(a-b)-a(x-b)=a^2-2b^2$ [a≠2b x=a+b; se a=2b $\forall x\in\Re$]

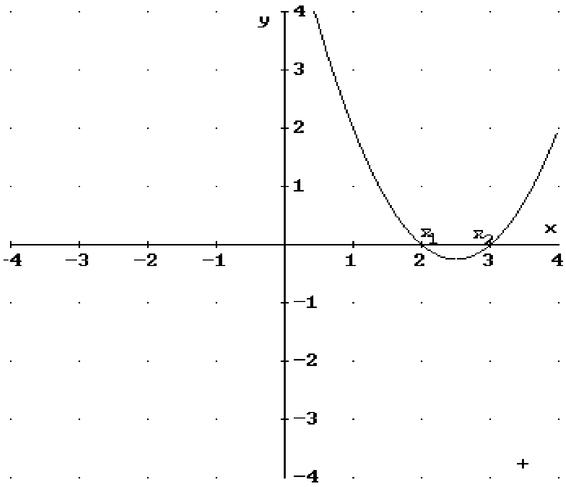
EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Teoria in sintesi

Consideriamo ora le equazioni algebriche di secondo grado in un'incognita la cui forma normale è:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad a\neq 0$$

Risolvere un'equazione di secondo grado significa trovare le intersezioni, se esistono,della parabola y=$ax^2+bx+c=0$ con l'asse x:



la cui *formula risolutiva* e'. $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (1)

- il termine $b^2-4ac=\Delta$ e' detto *discriminante*
- *La formula risolutiva può essere applicata a qualsiasi equazione di secondo grado il cui discriminante sia maggiore o uguale a zero; risulta però più semplice risolvere le equazioni incomplete ricorrendo alle regole note di scomposizione dei polinomi e di annullamento del prodotto*

Le soluzioni di un'equazione di secondo grado dipendono dal valore del discriminante ed in particolare:

- Se Δ>0 l'equazione ammette *due soluzioni reali e distinte* date dalla formula (1)
- Se Δ<0 l'equazione *non ammette soluzioni reali*
- Se Δ=0 l'equazione ha *due soluzioni reali e coincidenti* della forma: $x=-\dfrac{b}{2a}$

Per risolvere un'equazione di secondo grado e' quindi necessario calcolare prima il discriminante per verificare se l'equazione ammette o no soluzioni reali

Esempi

Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado

1. $4x^2+27x-7=0$

- $\Delta= 841>0$ l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte
- $x = \frac{-27 \pm \sqrt{841}}{8}$ che risolta fornisce le due soluzioni $x_1=-7$ e $x_2=1/4$

2. $49x^2-36=0$ l'equazione è equivalente a:

- $x^2 = \frac{36}{49}$ con $\Delta>0$
- $x = \pm\frac{6}{7}$ sono le due soluzioni reali e distinte

3. $\sqrt{3}x^2 + 5x = 0$ l'equazione è equivalente a:

- $x\left(\sqrt{3}x + 5\right) = 0$ che ha come soluzioni
- $x = 0 \quad x = -\frac{5\sqrt{3}}{3}$

4.$4x^2-12x+9=0$

- $\Delta=0$ ho due soluzioni reali e coincidenti
- $x_1=x_2=3/2$

5. $13x^2+7x+1=0$
   - $\Delta=-3<0$ l'equazione non ha soluzioni reali

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Risolvere le equazioni:

1. $x^2+1=0$
2. $2\left(2x^2 - 3x + 4\right) = 3(x-1)^2 + 6$
3. $(x-1)(x-3) - (x-5)^2 = 2x(3-2x)$

4. $x+3-2x\left(\frac{1}{2}x-1\right)=5(2-x)$

SOLUZIONI

1. nessuna soluzione reale
2. $x_1=1$ $\quad x_2=-1$
3. $x_1=5/2$ $\quad x_2=-5/2$
4. $x_1=1$ $\quad x_2=7$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. $4x^2-x(2-x)+2(x-1)=3$ $\quad[\pm 1]$
2. $\frac{1-3x}{5}+1-\frac{(2-x)(2+x)}{3}=x-\frac{1}{5}+\frac{1+x^2}{15}$ $\quad[0;6]$
3. $(2x-1)(x+2)-2(3x^2-x(x-3))+7=0$ $\quad[1;-5/2]$
4. $(x-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}(2x+1)-x-4=0$ $\quad[\sqrt{2};1-\sqrt{2}]$

EQUAZIONI FRAZIONARIE NUMERICHE

Risolviamo l'equazione:

$$\frac{4}{x^2+3x-10}=\frac{x+1}{5+x}-\frac{6+6x}{5(2-x)}$$

- calcoliamo il m.c.m. fra i denominatori e per fare questo scomponiamo il trinomio che compare al primo denominatore ricordando la regola della scomposizione del trinomio di secondo grado: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ dove x_1 e x_2 rappresentano le soluzioni reali dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Nel nostro caso si ottiene: $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$
- $\frac{4}{(x-2)(x+5)}=\frac{x+1}{5+x}+\frac{6+6x}{5(x-2)}$ nella terza frazione si sono moltiplicati il numeratore ed il denominatore per –1 per ottenere il fattore (x-2) che compare anche nel primo denominatore.
- $\frac{20}{5(x-2)(x+5)}=\frac{5(x+1)(x-2)+(6+6x)(x+5)}{5(x-2)(x+5)}$
- moltiplicando a sinistra e a destra per 5(x-2)(x+5) elimino i denominatori supposto che siano diversi da zero, e cioè se : $x\neq 2$ e $x\neq -5$
- $20=5(x^2-x-2)+6x+30+6x^2+30x$

- $-11x^2 - 31x = 0$
- $x(11x + 31) = 0$
- quindi le soluzioni sono : x=0 ed x=-31/11, entrambe diverse da 2 e –5, valori che avevamo scartato perché per quei valori l'equazione era priva di significato. Dunque le soluzioni trovate sono entrambe accettabili

ESERCIZI

1. $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = \frac{2(x^2+4)}{x^2-4}$ nessuna soluzione

2. $\frac{x^2-x}{x-1} = 1; \quad \frac{4x^2-1}{2x+1} + 2 = 0$

(Si possono semplificare i conti?)

3. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{x-1} - \frac{4}{x}$ $[5, \quad -2]$

4. $\frac{1}{1-x} + \frac{4}{3} = \frac{1}{x+1} - \frac{1+x}{x-1}$ $\left[2, \quad -\frac{1}{2}\right]$

5. $\frac{7x-10}{x^2-6x+8} = \frac{5}{2-x} + \frac{x+5}{x-4}$ $[5]$

6. $\frac{(x+1)^2-1}{4x^2-4x+1} + \frac{4x}{2x-1} = 0$ $\left[0, \quad \frac{2}{9}\right]$

7. $\frac{1}{x^2-3x} - \frac{9}{8x} = \frac{29}{2x^3-2x^2-24x} - \frac{1}{x^2+4x}$ $\left[x = \frac{7}{9}\right]$

$m.c.m = 8x(x-3)(x+4)$

8. $\left(\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2}\right) : \left(1 - \frac{x-2}{x+2}\right) - \frac{1}{2} + x = 0$ [impossibile]

N.B.: L'equazione risolutiva, dopo aver svolto i passaggi è: $3x^2 - 5x + 6 = 0$

<u>Equazioni letterali</u>

1. $3x^2 + 5ax = 0$ [$0, \quad -\frac{5a}{3}$ in questa equazione a può essere qualunque?]
2. $9x^2 + a^2 = 0$ [Qual'è l'unico caso per cui questa equazione è possibile?]
3. $2ax^2 - b = 0$ [$\pm\sqrt{\frac{b}{2a}}$, se a, $b > 0$: discutere attentamente gli altri casi]

DISEQUAZIONI ALGEBRICHE

Teoria in sintesi

- Le diseguaglianze ($A \neq B$) tra due espressioni A,B possono presentarsi nelle forme: $A<B$, $A>B$, $A \leq B$, $A \geq B$. A e B possono contenere costanti e variabili.
- Diciamo che una diseguaglianza è soddisfatta quando risulta vera per qualsiasi valore assunto dalle variabili che eventualmente vi compaiono.

<u>Esempi</u>

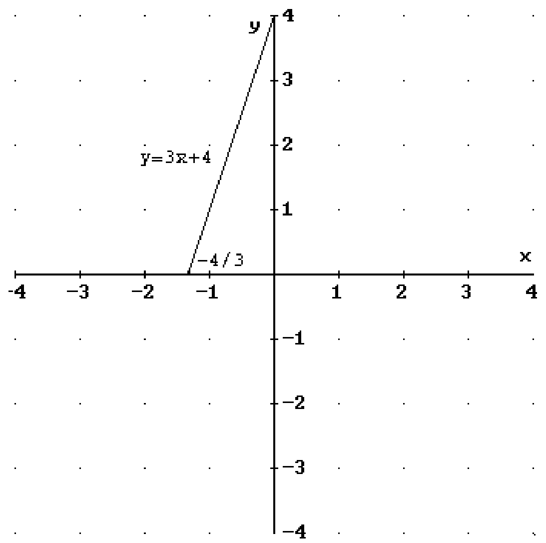
Sono diseguaglianze*:*

- $4>3$
- $x^2+4>0$
- $(x-1)^2 \geq 0$

- *Le disequazioni sono diseguaglianze che contengono delle variabili e che sono soddisfatte solo da particolari valori assunti dalle variabili stesse. Tali valori costituiscono l'insieme delle* soluzioni *della disequazione*

DISEQUAZIONI LINEARI IN UN'INCOGNITA

Le soluzioni di una disequazione intera di primo grado sono rappresentate graficamente da una semiretta.Risolvere la disequazione $ax+b>0$ è come chiedersi per quali valori di x è positiva la retta $y=ax+b$. Ad esempio se vogliamo risolvere la disequazione $3x+4>0$, graficamente otteniamo:



Esempi

Risolvere le disequazioni:

1. $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{4}\right) > 3x-\frac{x}{6}+5$ eliminiamo i denominatori

- $4x-9 > 36x-12x+60$
- $-20x > 69$ dividiamo entrambi i membri per –20 e quindi cambiamo il verso della disequazione (vedi appendice)
- $x < -\frac{69}{20}$

ESERCIZI

1. $(2x-1)^2-(3x-2)^2 > \frac{5x-1}{2}-\frac{4x(1+5x)}{4}$ [x>5/13]
2. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2x\left(3x-\frac{1}{2}\right) > \left(2x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(3x-\frac{1}{3}\right)^2$ [x<-17/72]
3. $2(2x-1)^2-(5x-1)(x-2) < 3(1-x)^2+2(2x-3)+5x-2$ [nessun valore di x]

DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Teoria in sintesi

- **METODO GRAFICO (uso della parabola)**

Per dare una interpretazione grafica delle disequazioni di secondo grado

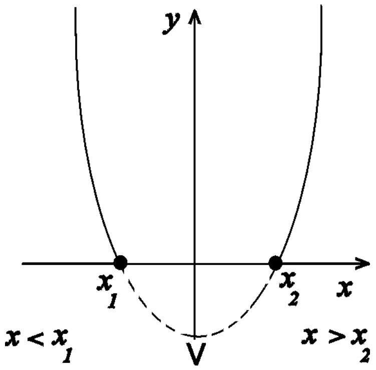
$ax^2+bx+c > 0$

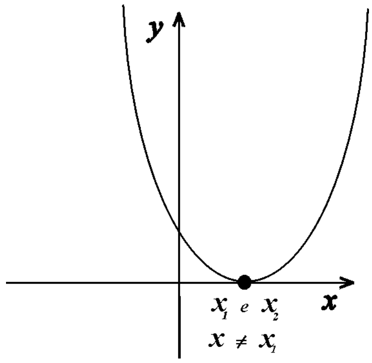
$ax^2+bx+c < 0$

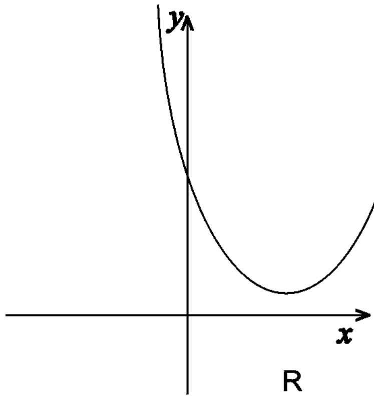
a) si disegna la parabola;
b) si cercano gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse x;
c) si considerano le soluzioni delle disequazioni che sono date dalle ascisse dei punti della parabola che hanno ordinata positiva $(y > 0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c > 0)$ oppure negativa $(y < 0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c < 0)$.

I casi possibili risultano riassunti nel seguente schema:

- Se $ax^2+bx+c > 0$



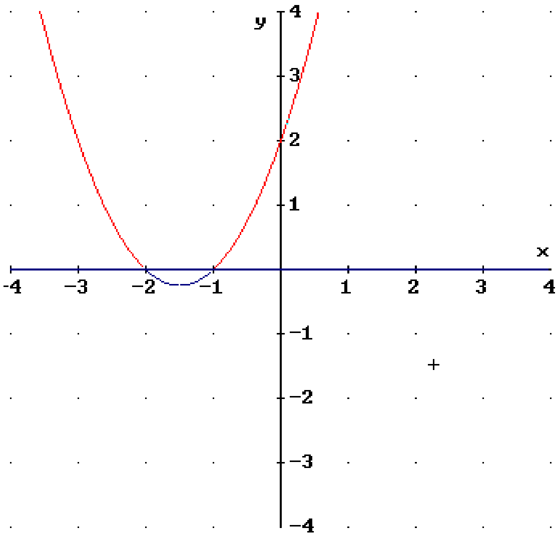




- Se $ax^2 + bx + c \leq 0$

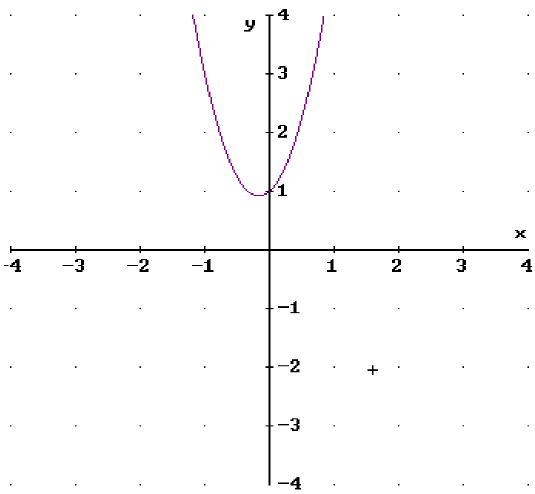
Si costruisca per questo caso lo schema riassuntivo in modo analogo. Si ricordi che in questo caso si procede considerando la parte di parabola che sta nel semipiano delle *y* negative.

<u>Esempio</u> *.1.* Risolvere graficamente la disequazione: $x^2 + 3x + 2 > 0$



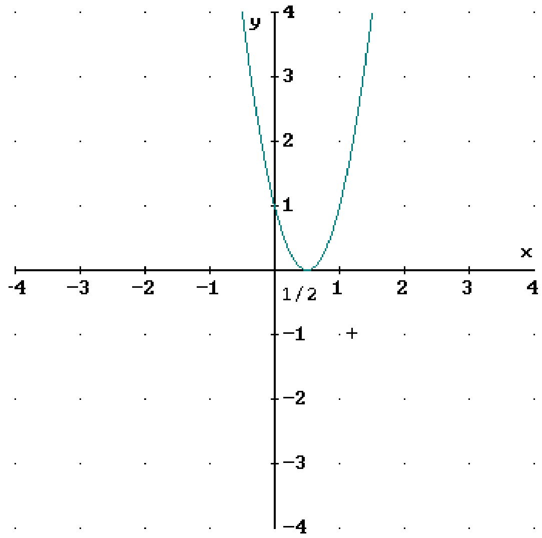
i due rami della parabola che rappresentano le soluzioni della disequazione data sono colorati in rosso e rappresentano i valori di x<-2 oppure x>-1

2.Risolvere graficamente la disequazione : $3x^2+x+1\leq 0$



la parabola si trova tutta nel semipino delle y>0 e dunque non è mai negativa e non si annulla per alcun valore di x dato che non ha intersezioni con l'asse delle ascisse. La disequazione data non ha soluzioni nel campo reale.

3.Risolvere la disequazione: $4x^2-4x+1>0$



la parabola è positiva per ogni valore di x reale ed interseca l'asse x in x=1/2, valore che annulla il trinomio di secondo grado. Dunque la disequazione data è verificata per ogni x reale con x≠1/2.

(notiamo che il trinomio dato rappresenta il quadrato di un binomio)

DECOMPOSIZIONE DEL TRINOMIO DI SECONDO GRADO

La risoluzione analitica delle disequazioni

$$ax^2+bx+c>0 \qquad (ax^2+bx+c<0)$$

avviene nel modo seguente, supposto il coefficiente <u>a>0</u> (nel caso a<0 e' sufficiente cambiare i segni per riportarsi a questo caso)

a. $ax^2+bx+c>0$

1. $\Delta>0$ dette $x_1;x_2$ le due soluzioni di $ax^2+bx+c=0$ e posto $x_1<x_2$ si ha

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

E quindi, dalle regole dei segni, otteniamo la soluzione

$$x<x_1 \vee x>x_2$$

(**N.B.:** Il simbolo $\vee$, preso in prestito dalla logica, sta a significare che si considera l'unione dei due insiemi $x<x_1$, $x>x_2$).

2. $\Delta = 0$ $\qquad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

quindi soluzione $\qquad \forall x \in \Re \quad x \neq x_1$

3. $\Delta < 0$ $\qquad$ soluzione $\forall x \in \Re$

b.Invece per la disequazione $ax^2 + bx + c < 0$ in modo analogo si ottiene:

1. $\Delta > 0$ $\qquad x_1 < x < x_2$, ossia per *valori interni* all'intervallo di estremi x_1, x_2;

2. $\Delta = 0$ $\qquad$ non è mai verificata;

3. $\Delta < 0$ $\qquad$ non è mai verificata;

Esempi

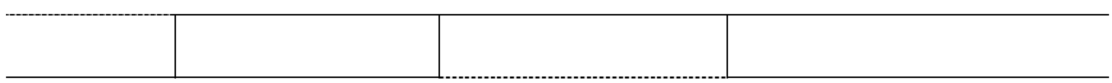
a) $3x^2 - x - 2 < 0; \quad 25x^2 - 20x + 4 > 0; \quad 12x^2 - 3x + 1 > 0$

- risolviamo la prima disequazione: $\Delta = 25 > 0 \qquad x_1 = -\dfrac{2}{3} \quad x_2 = 1$ e dunque siamo nel caso b.2 , le soluzioni saranno $-\dfrac{2}{3} < x < 1$.
- Risolviamo la seconda: $\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = \dfrac{2}{5}$ dunque la disequazione è verificata per ogni x reale con $x \neq \dfrac{2}{5}$ (Caso a.2)
- Risolviamo la terza: $\Delta = -39 < 0$ dunque la disequazione è verificata per ogni x reale
- (caso a.3)

b) $3x^3 + 14x^2 + 9x - 18 \geq 0$

- $(x+3)(3x^2 + 5x - 6) \geq 0$ $\qquad$ è la scomposizione del polinomio dato utilizzando la regola di Ruffini
- $(x+3) \geq 0 \quad x \geq -3$ $\qquad$ studiamo il segno di ogni fattore
- $3x^2 + 5x - 6 \geq 0 \quad \Delta = 97 \quad \rightarrow x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{97}}{6} \quad x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}$ e dunque la disequazione è verificata per $x \leq \dfrac{-5-\sqrt{97}}{6} \quad x \geq \dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}$
- Osserviamo ora lo schema seguente e ricordiamo che la disequazione data richiede che il prodotto dei fattori sia maggiore o uguale a zero:

$-3 \qquad \dfrac{-5-\sqrt{97}}{6} \qquad \dfrac{-5+\sqrt{97}}{6}$



- Dunque le soluzioni della disequazione data sono: $-3 \le x \le \frac{-5-\sqrt{97}}{6} \vee x \ge \frac{-5+\sqrt{97}}{6}$

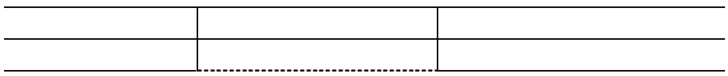
c) $3x^4 - 3x^2 - 6 < 0$

- Posto $t = x^2$, la disequazione ammette due radici $t = -1, t = 2$
- Pertanto la disequazione data si può scomporre in $3(t+1)(t-2) < 0$ cioè $3(x^2+1)(x^2-2) < 0$
- Studiando il segno dei singoli fattori:

$$3 > 0 \qquad \forall x \in \Re$$
$$x^2 + 1 > 0 \qquad \forall x \in \Re$$
$$x^2 - 2 > 0 \qquad x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$$

- Dal grafico seguente risulta quindi (essendo la disequazione data minore di zero):

$-\sqrt{2}$ $\qquad\qquad$ $\sqrt{2}$



- Le soluzioni sono $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

TEST DI AUTOVERIFICA

Risolvere le disequazioni:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0 \qquad x^2 - x - 12 < 0$
b) $6x^4 + 2x^2 + 5 > 0$
c) $x^4 - 20x^2 + 64 \le 0$
d) $\frac{(x^2+2)x^5}{x^3 - 1} < 0$

SOLUZIONI

a) $[x > 2 \quad \vee \quad x < 1]; \quad [-3 < x < 4]$
b) $\forall x \in \Re$
c) $-4 \le x \le -2 \vee 2 \le x \le 4$
d) $0<x<1$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1) $2 - 2x^2 \le 5 - 5x$ $\qquad [x \le 1 \vee x \ge \frac{3}{2}]$

2) $x^4 - 2x^2 - 15 \le 0$ $\qquad [-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}]$

3) $\frac{(x+4)(x+2)}{x(x-3)(x+2)} \ge 0$ (si proceda studiando il segno dei singoli fattori) $\qquad [-4 < x < -2 \vee -2 < x \le 0 \vee x > 3]$

4) $\frac{2x^3 + 5x^2 - 12x}{x^2(x^4+1)} \ge 0$ $\qquad [-4 < x < 0 \vee x \ge \frac{3}{2}]$

APPENDICE

EQUAZIONI

- ***Principi di equivalenza delle equazioni:***

1. Sommando o sottraendo ad entrambi i membri di un’equazione uno stesso numero, si ottiene un’equazione equivalente a quella data
2. Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un’equazione per uno stesso numero *diverso* da zero, si ottiene un’equazione equivalente a quella data

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (1)$$

- il termine $b^2 - 4ac = \Delta$ e’ detto *discriminante*
- se b≠0 e c≠0, l’equazione e’ *completa*
- se b=0 e c≠0, l’equazione è *incompleta* ed è detta **pura**
- se c=0 e b≠0, l’equazione è *incompleta* ed è detta **spuria**

EQUAZIONI IRRAZIONALI

Un'equazione è *irrazionale* se contiene almeno un radicale nel cui radicando compare l'incognita.

Ad esempio

$\sqrt{2x} - 4 = 3x$, è un'equazione irrazionale;
$4x - \sqrt{2} = 6$, non è un'equazione irrazionale.

Data un'equazione *A(x)=B(x)*, consideriamo l'equazione $[A(x)]^n = [B(x)]^n$:
- se *n è pari*, essa ha come soluzioni, oltre a quelle di *A(x)=B(x)*, anche quelle di *A(x)=-B(x)*;
- se *n è dispari*, essa è equivalente a quella data.

Esempio
Risolvere la seguente equazione

$2x + 1 = x - 9$

e l'equazione

$(2x+1)^2 = (x-9)^2$

Si ottengono le stesse soluzioni? Le due equazioni sono equivalenti?

[La prima equazione dà come soluzione $x = -10$, la seconda invece $\begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = \frac{8}{3} \end{cases}$]

Per risolvere un'equazione irrazionale

$$\sqrt[n]{A(x)} = B(x)$$

è necessario "liberarci" in qualche modo dei radicali presenti, per ricondurre il problema alla soluzione di una equazione razionale che ci dia buone informazioni sulle soluzioni dell'equazione iniziale. Per fare questo operativamente dobbiamo:

- elevare a *n* entrambi i membri dell'equazione;
- controllare se *n* è pari o dispari: se *n* è dispari, le soluzioni dell'equazione ottenuta sono *le stesse* dell'equazione irrazionale; se *n* è pari, possiamo eseguire il *controllo* delle soluzioni mediante *verifica*.

Esempio

$\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2x - 6$

Elevando entrambi i membri al quadrato otteniamo

$-3x^2 + 27x - 42 = 0$ equivalente all'equazione : $x^2 - 9x + 14 = 0$
che ci dà come soluzioni $x_1 = 7$; $x_2 = 2$.
Questi valori saranno anche soluzione dell'equazione di partenza?
Per verificarlo sostituiamo 7 e 2 nell'equazione irrazionale data.

Sostituiamo *x=7*

Primo membro	**Secondo membro**
$\sqrt{49 + 21 - 6} = 8$	$2 \cdot 7 - 6 = 8$

Ora sostituiamo x=2

$\sqrt{4 + 6 - 6} = 2$	$2(2) - 6 = -2$

Nel secondo caso, poiché i due membri dell'equazione non hanno lo stesso valore, la radice *x=2* non è soluzione dell'equazione irrazionale.

N.B.: C'è un altro metodo per verificare quali soluzioni sono accettabili? Si, bisogna imporre la non negatività del radicando e del secondo membro, ottenendo così la condizione $x > 3$

DISEGUAGLIANZE E DISEQUAZIONI

- ***proprietà delle disuguaglianze:***

  1.dati tre numeri a,b,c reali: se $a<b$ allora $a\pm c<b\pm c$, se $a>b$ allora $a\pm c>b\pm c$

  2.dati tre numeri a,b,c reali diversi da zero, se $a>b$ oppure $a<b$ e $c>0$ allora $ac>bc$ oppure $ac<bc$; se $a>b$ oppure $a<b$ e $c<0$ allora $ac<bc$ oppure $ac>bc$

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Le *disequazioni irrazionali* del tipo $\sqrt{A(x)} < B(x)$ sono equivalenti a un sistema di tre disequazioni:

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) > 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) < [B(x)]^2 \end{cases}$$

Mentre le *disequazioni irrazionali* del tipo $\sqrt{A(x)} > B(x)$ hanno come insieme di soluzione *l'unione* degli insiemi delle soluzioni di due sistemi, ognuno di due disequazioni:

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} B(x) < 0 \\ A(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > [B(x)]^2 \end{cases}$$

Esempio

$\sqrt{25-x^2} \leq x-1$ (oppure $x-1 \geq \sqrt{25-x^2}$)

La disequazione ha senso quando $\begin{cases} 25-x^2 \geq 0 \\ x-1>0 \\ 25-x^2 \leq (x-1)^2 \end{cases}$

N.B.: La prima condizione è necessaria perché esista la radice, la seconda perché se $x<1$ la disuguaglianza in questione non sarà mai verificata (perché si chiede che una quantità positiva al primo membro sia $\leq$ di una quantità negativa al secondo membro!).
Si ottiene quindi, dopo brevi passaggi,

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ x>1 \\ x^2-x-12 \geq 0 \end{cases}$$

Le soluzioni accettabili sono quindi $4 \leq x \leq 5$.
Potrebbe essere utile provare a fare i grafici di

$$25-x^2, \quad x-1, \quad (x-1)^2$$

per capire la discussione algebrica del sistema.

<u>Esercizi</u>

1. Risolvere le seguenti equazioni irrazionali, controllando l'accettabilità delle soluzioni.

   $\sqrt{2x+5} = 3(x-1)$ [Perché la soluzione $\frac{2}{9}$ non è accettabile?]

   $\sqrt{3x(x+2)+1} = (x+1)^2 + x$ [0; -4]

   $\sqrt{\frac{1}{5}x(3x-1)} = -\frac{2}{3}(1+3x)$ [-5]

   $\sqrt{2x+6} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}$ [Perché la soluzione $-\sqrt{13}$ non è accettabile?]

   (dopo aver elevato al quadrato due volte, si ottiene $3 = \sqrt{x^2-4}$ ….)

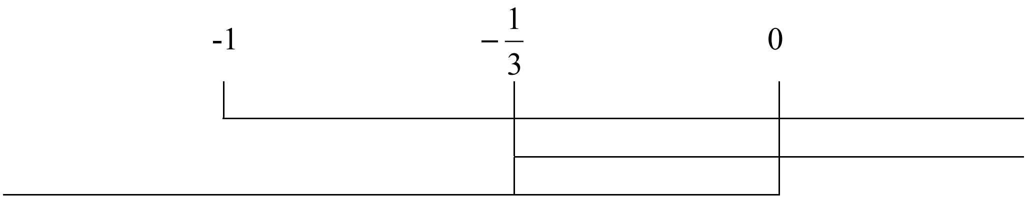
   $2x = \sqrt{x}$ [0; $\frac{1}{4}$]

2. Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali:

   $\sqrt{x^2-3x+2} \geq x$ $\left[0 < x < \frac{2}{3}\right]$

   $\sqrt{x+1} > \sqrt{3x+1}$ $\left[-\frac{1}{3} \leq x < 0\right]$

   N.B.: il grafico riassuntivo di questa disequazione irrazionale è il seguente



   $\sqrt{x+1} > 5 - \sqrt{x+6}$ $[x > 3]$

CAPITOLO 4

SISTEMI

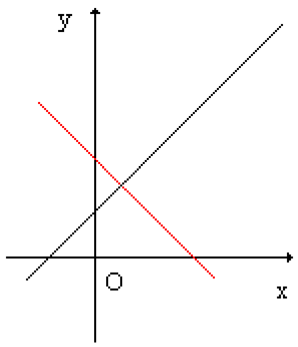
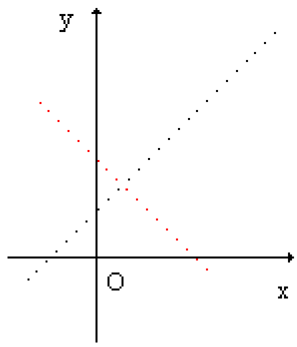
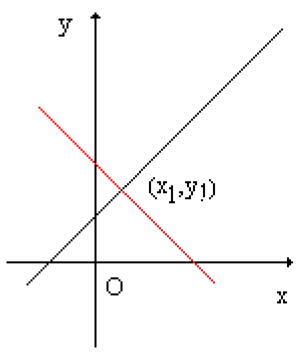
Teoria in sintesi

- Una coppia di equazioni di primo grado in due variabili si chiama **sistema lineare di equazioni**. **Soluzione del sistema** è l'insieme di tutte e sole le soluzioni comuni alle due equazioni, cioè tutte le coppie (x,y) che soddisfano contemporaneamente le due equazioni.

- Un sistema di due equazioni di primo grado in due variabili è scritto **in forma normale** quando assume la forma: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ con $a,b,c,a',b',c' \in$ R.

- INTEPRETAZIONE GRAFICA: un'equazione di primo grado in due incognite ammette infinite soluzioni. Ognuna di queste è interpretabile come un punto sul piano cartesiano. Ricordiamo che **un'equazione di primo grado in due variabili** ha come rappresentazione una **retta**, e viceversa ad ogni retta corrisponde un'equazione lineare in due variabili.

- Nella tabella è considerato uno stesso problema dal punto di vista algebrico e dal punto di vista geometrico:

Equazioni lineari in x, y	**Insieme delle soluzioni**	**Soluzione del sistema**
$ax + by = c$	$I_1 = \{(x_1, y_1);(x_2, y_2);.....\}$	$I_1 \cap I_2 = (x_1, y_1)$
$a'x + b'y = c'$	$I_2 = \{(x_1, y_1);(x_3, y_3);.....\}$	
RETTE 	PUNTI DELLE RETTE 	PUNTO INTERSEZIONE DELLE RETTE 

- Trovare le soluzioni di un sistema lineare corrisponde geometricamente allo studio dell'intersezione di due rette di equazioni date.[1]

- Due sistemi si dicono **equivalenti** se ammettono la stessa soluzione.

[1] Se non si ricordano alcune relazioni fra punti del piano cartesiano e l'equazione della retta si riveda il cap.2 "Coordinate cartesiane e geometria Analitica"

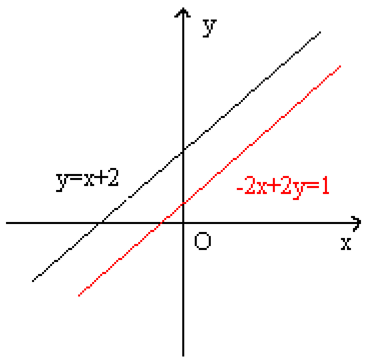
SISTEMI DETERMINATI, INDETERMINATI E IMPOSSIBILI

Sistema impossibile

Consideriamo il seguente sistema: $\begin{cases} x - y = -2 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases}$. Risolviamo le due equazioni rispetto all'incognita y:

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ -2x + 2y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ y = x + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Uguagliando i due secondi membri si ottiene: x + 2 = x + ½ che è un'equazione impossibile. Graficamente abbiamo l'equazione di due rette con uguale coefficiente angolare, ma diversa intercetta sull'asse delle y, cioè due rette parallele.



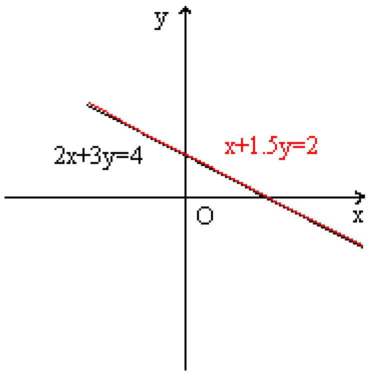
Sistema indeterminato

Sia dato il sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x + \dfrac{3}{2}y = 2 \end{cases}$. Risolviamo entrambe le equazioni rispetto a y: $\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3} \\ y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Uguagliando i due secondi membri si ottiene l'equazione in x:

$-\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3} = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{3}$ che è un'equazione indeterminata (ammette ogni valore come soluzione).

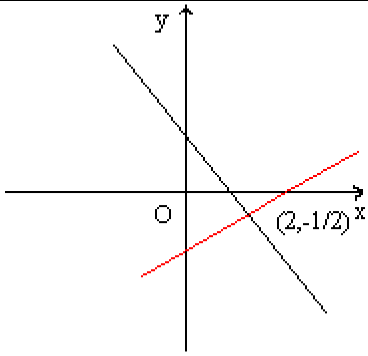
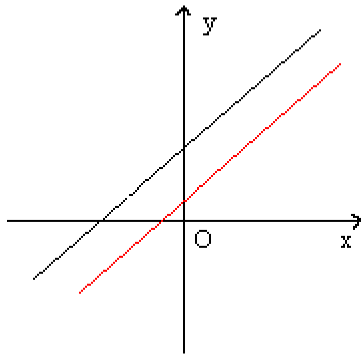
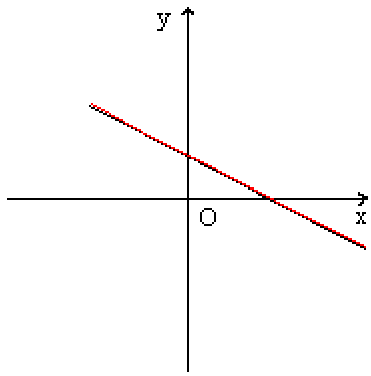
Quindi il sistema ammette infinite soluzioni. Graficamente abbiamo l'equazione di due rette con uguale coefficiente angolare e uguale intercetta sull'asse delle y, cioè due rette coincidenti con tutti i punti in comune.



In generale: scrivendo, secondo il procedimento del confronto, il sistema: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ in modo che le due equazioni assumano la forma esplicita dell'equazione della retta, si ottiene la forma:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b} \\ y=-\dfrac{a'}{b'}x+\dfrac{c'}{b'} \end{cases}$$

ciascuna delle due equazioni corrisponde ad una retta di coefficiente angolare rispettivamente: *m = -a/b* e *m' = -a'/b'*. Abbiamo allora tre casi possibili.

<table>
<tr><td>RETTE INCIDENTI</td><td>RETTE PARALLELE DISTINTE</td><td>RETTE PARALLELE COINCIDENTI</td></tr>
<tr><td>Coefficienti angolari differenti:
$a/b \neq a'/b'$</td><td>Coefficienti angolari uguali, ma
$c/b \neq c'/b'$</td><td>Coefficienti angolari uguali e
$c/b = c'/b'$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Il sistema ammette una soluzione . Si dice determinato</td><td>Il sistema non ha soluzioni.
E' impossibile.</td><td>Il sistema ha infinite soluzioni.
E' indeterminato.</td></tr>
</table>

RISOLUZIONE DI UN SISTEMA LINEARE

Metodo del confronto

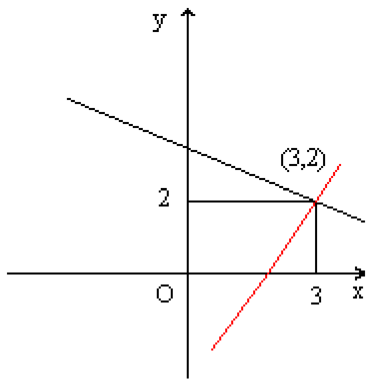
Dato il sistema espresso in forma normale, $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$, si possono risolvere entrambe le equazioni rispetto alla stessa incognita (ad esempio y, in modo da ottenere la forma esplicita dell'equazione della retta) e poi uguagliare i secondi membri dell'equazione.

Esempio

Dato il sistema: $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x+3y=3 \end{cases}$:

a. Risolviamo entrambe le equazioni rispetto alla lettera y: $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+3 \end{cases}$
b. Uguagliamo i secondi membri: 2x – 4 = -1/3 x + 3
c. Risolviamo l'equazione in x: 7/3 x = 7 → x = 3
d. Sostituiamo il valore di x in una delle due equazioni: y = 2 ·3 – 4 = 2
e. (3 ; 2) è la soluzione del sistema.

Verifichiamo graficamente rappresentando sul piano cartesiano le due rette di equazioni
y = 2x – 4 e y = - 1/3 x + 3:



In sintesi:

1. si risolvono le due equazioni rispetto alla stessa incognita y;
2. si uguagliano i secondi membri delle due equazioni;
3. si risolve l'equazione in *x* ottenuta;
4. si sostituisce il valore ottenuto nella prima equazione, ottenendo così il valore dell'altra variabile.

Metodo di sostituzione

Esso consiste nel ricavare un'incognita da una delle due equazioni, per poi sostituire il valore ottenuto nell'altra equazione.

Esempio

E' dato il sistema: $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-2y=3 \end{cases}$:

a. Ricaviamo x dalla seconda equazione: $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x=2y+3 \end{cases}$

b. Sostituiamo il valore della x nella prima equazione : otteniamo così un'equazione nella sola incognita y:
$\begin{cases} 3(2y+3)+2y=5 \\ x=2y+3 \end{cases}$

c. Risolvendola si ottiene: y = -1/2

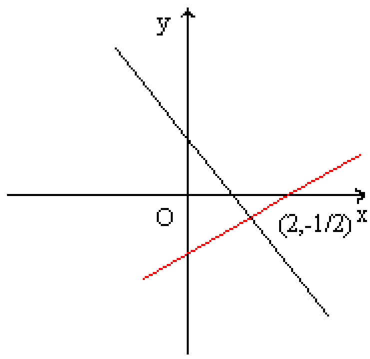
d. Ora possiamo sostituire il valore di y nella seconda equazione e ricavare il valore di x: $\begin{cases} x=2(-\frac{1}{2})+3 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$

e. La soluzione del sistema è (2, -1/2).

E' sempre opportuno accompagnare la soluzione algebrica del sistema con quella grafica.

Sistema in forma normale $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x=2y+3 \end{cases}$

Sistema in forma esplicita $\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \\ y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases}$



In sintesi:
1. si risolve una delle due equazione rispetto a una delle incognite;
2. si sostituisce il valore così ottenuto nell'altra equazione, che si trasforma in un'equazione in una incognita;
3. si risolve l'equazione;
4. si sostituisce il valore ottenuto nella prima equazione, ottenendo così il valore dell'altra variabile.

Metodo di addizione o sottrazione

Se in un sistema si sostituisce un'equazione con quella ottenuta sommando o sottraendo ad entrambi i membri di un'equazione i due membri dell'altra, si ottiene un sistema equivalente a quello dato. Dimostriamo che questo metodo è valido in generale. Infatti se (x_1, y_1) è soluzione del sistema:
$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ è anche soluzione dell'equazione *(ax + by + c) + (a'x + b'y + c') = 0* (1).

La dimostrazione è immediata, poiché (x_1, y_1) rende nulli i due fattori in parentesi ed è perciò soluzione dell'equazione (1). Quindi se a una delle equazione del sistema sostituiamo un'equazione equivalente, l'insieme delle soluzioni non cambia.

<u>**Esempio**</u>

Sia dato il sistema: $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-2y=3 \end{cases}$. Se ai due membri della prima equazione si sommano i due della seconda (che sono uguali fra loro) si ottiene:

3x + 2y	=	5
x – 2y	=	3
4x --	=	8

Si ottiene così il sistema $\begin{cases} 4x=8 \\ x-2y=3 \end{cases}$. Dalla prima equazione si ricava il valore della x = 2 e sostituendo nella seconda equazione si ha y = -1/2. E' facile verificare che (2, -1/2) è la soluzione del sistema $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x-2y=3 \end{cases}$ e quindi esso è equivalente al sistema $\begin{cases} 4x=8 \\ x-2y=3 \end{cases}$.

Si chiama **combinazione lineare** di due equazioni l'equazione che si ottiene sommando tra loro i relativi membri delle due equazioni, moltiplicati o divisi per un qualunque numero (diverso da zero).

Esempio

I equazione	$3x - 2y + 5 = 0$
II equazione	$2x + 4y + 1 = 0$
Combinazione lineare	$k(3x - 2y + 5) + h(2x + 4y + 1) = 0 \quad \forall\, h,k \in R$

Metodo della combinazione lineare

Un sistema di equazioni di primo grado in due incognite è equivalente a un altro sistema che sostituisca a una delle equazioni una qualunque **combinazione lineare** delle stesse.

Esempio

Risolvere il seguente sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 16 \end{cases}$.

Si moltiplicano i due membri della prima equazione per 5 e quelli della seconda per (-2), in modo che sommando membro a membro le due equazioni, sparisca l'incognita *x*.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 4y = 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 8y = -32 \end{cases} \rightarrow 15\,y - 8y = 25 - 32 \rightarrow y = -1.$$

Sostituendo in una qualunque delle due equazioni, si trova x = 4. La soluzione del sistema è perciò (4, -1).

In sintesi:

1. si moltiplicano entrambi i fattori di una o di entrambe le equazioni per fattori non nulli, scelti in modo che i coefficienti ottenuti relativi a una variabile siano opposti;
2. si sommano membro a membro le due equazioni ottenendo un'equazione in un'incognita;
3. si risolve l'equazione nell'incognita;
4. si sostituisce il valore ottenuto nella prima equazione, ottenendo così il valore dell'altra variabile.

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Risolvere i seguenti sistemi applicando il metodo risolutivo indicato a lato:

a. $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{4} - 1 \\ y = 4x + 1 \end{cases}$ metodo del confronto

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{2}(y - 3) \\ x - y = 2/3 - 1.5x \end{cases}$ metodo di sostituzione

c. $\begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 3x = 4y - 8 \end{cases}$ metodo di combinazione lineare

2. Risolvere i seguenti sistemi con il metodo che si ritiene più opportuno, evidenziando tutti i passi utilizzati:

a. $\begin{cases} \dfrac{(2x - y)}{3} + 0.5(x + y) = 5 \\ -0.5y + \dfrac{1}{3}(2x - 5) = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-2y=0 \\ \dfrac{3-x}{12}+\dfrac{y-6}{4}=-1 \end{cases}$

3. Senza risolvere i sistemi, indicare quali tra i seguenti sono determinati, indeterminati o impossibili. Controllare le conclusioni mediante la rappresentazione grafica.

a. $\begin{cases} -x+2y=3 \\ 6y-3x=0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x-4y=0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x-y=-1 \\ y=2x+1 \end{cases}$

4. Stabilire per quali valori dei parametri indicati il sistema è determinato:

a. $\begin{cases} x+4y=a \\ x+3y=2b \end{cases}$ b. $\begin{cases} ax+ay=3 \\ ax+(a+b)y=2a \end{cases}$

c. $\begin{cases} 5x=3-2by \\ 2x-y=2-by \end{cases}$

SOLUZIONI

1. a. (3/2 ; 7) b. (2; 13/3) ; c.(-4; -1)
2. a.(4; 2) b. (6; 3)
3. a. impossibile (infatti le rette sono parallele distinte); b. determinato (infatti le rette sono incidenti); c. indeterminato (infatti le rette sono parallele coincidenti).
4. a. per ogni valore di a e b visto che le rette sono incidenti (coefficiente angolare –1/4 per la prima e –1/3 per la seconda); b. per b = 0 e a = 3/2 il sistema è indeterminato; per b = 0 e a ≠ 3/2 il sistema è impossibile; per b ≠ 0 e ∀ a il sistema è determinato; c. per b = 5 il sistema è impossibile; per b ≠ 5 il sistema è determinato.

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. Vero o Falso?

a. Se (a,b) è la soluzione di un sistema di due equazioni lineari, il punto P(a;b) è il punto di intersezione delle rette che rappresentano le equazioni del sistema. [V]

b. L’equazione 3x +2y = 6 ammette una sola soluzione. [F]

c. Risolvere un sistema significa trovare quella coppia ordinata di valori che è soluzione di almeno una delle equazioni che lo determinano. [F]

d. Due sistemi equivalenti hanno almeno una soluzione in comune. [F]

e. Si consideri il generico sistema: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$: se ab’ = a’b allora il sistema ha infinite soluzioni; se c=c’=0 il sistema ha almeno una soluzione; se ab’ ≠ a’b il sistema ammette come soluzione una coppia ordinata di valori. [FFV]

f. Le soluzioni di un sistema dipendono dal metodo utilizzato. [F]

g. Il sistema $\begin{cases} ax-y=a \\ 2x+ay=2 \end{cases}$ è determinato per qualunque valore di a. [F]

h. Il sistema $\begin{cases} ax - 2y = 2a \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ per a = 1 è indeterminato. [V]

SISTEMI DI DISEQUAZIONI IN DUE VARIABILI

Dato un trinomio *ax + by +c = 0* e chiamata *d* la retta di equazione *ax + by +c = 0*, possiamo suddividere il piano cartesiano in tre parti:

- tutti i punti (x,y) della retta d: *ax + by +c = 0*
- due semipiani individuati dalla retta *d*: $\begin{cases} ax+by+c<0 \\ ax+by+c>0 \end{cases}$

L'insieme delle soluzioni di una disequazione lineare in sue incognite è *l'insieme delle coppie* (x,y) di numeri reali che soddisfano la disequazione. Questo insieme è graficamente uno dei due semipiani individuato dalla retta frontiera di equazione *ax + by + c = 0*.

- *Semipiani chiusi ed aperti*: nelle disequazioni ad un'incognita si incontrano espressioni della forma ax + b > 0 o cx + d ≥ 0. Nel secondo caso anche l'estremo dell'intervallo fa parte della soluzione e si dice che **l'intervallo è chiuso**. Nel caso delle disequazioni in due variabili, se nella disequazione anziché il segno < o > compare ≥ o ≤, significa che l'insieme delle soluzioni è l'unione dell'insieme della disequazione e dell'equazione. In pratica questo vuol dire che anche la retta di frontiera appartiene all'insieme delle soluzioni.

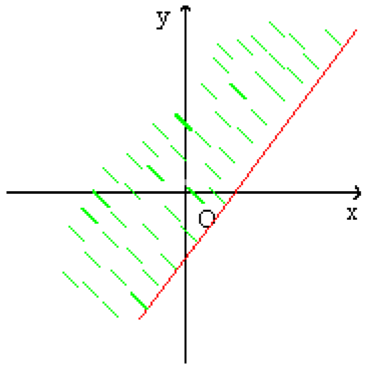


fig 1

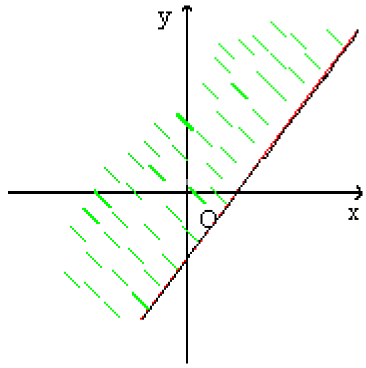


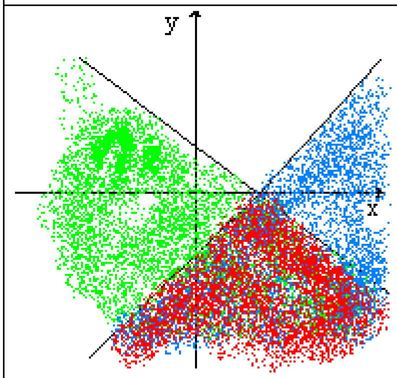
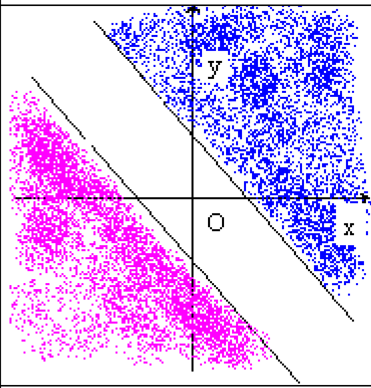
fig. 2

Nella figura 1, la frontiera non appartiene all'insieme delle soluzioni (3x –2y < 6) . Il semipiano è **aperto**.
Nella figura 2, la frontiera appartiene all'insieme delle soluzioni. Il semipiano è **chiuso**.

- Un sistema di due (o più) disequazione in due variabili è un *insieme di due* (o più) *disequazioni*. La soluzione di un sistema è l'insieme delle coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le disequazione.

- Pertanto si risolvono separatamente le singole disequazione lineari in due incognite e si determinano gli insiemi delle soluzioni I_1, I_2,…. Si trova quindi l'insieme $S = I_1 \cap I_2 \cap I_3$ che è l'insieme delle soluzioni del sistema.

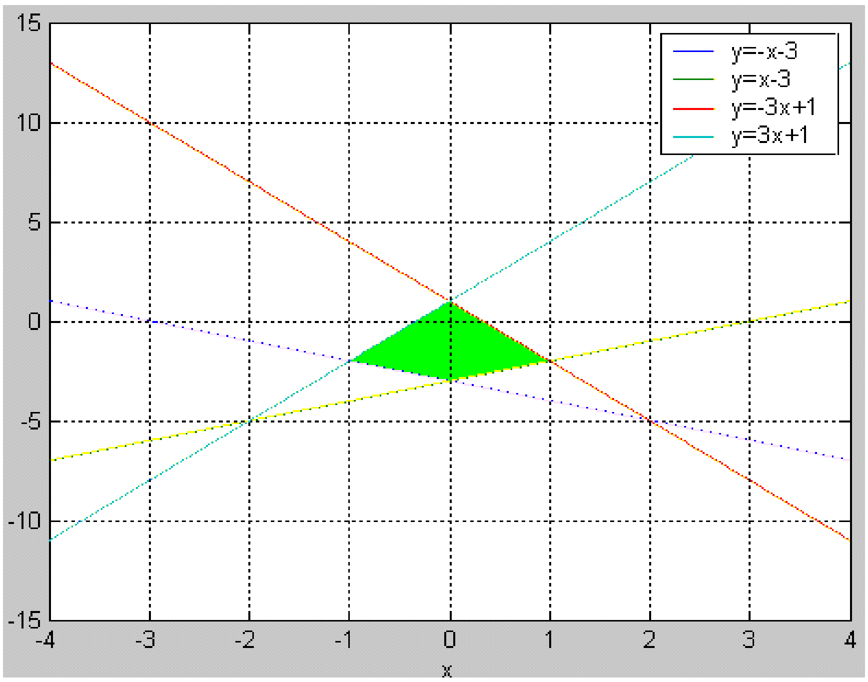
- Graficamente l'insieme delle soluzioni del sistema è la figura poligonale piana intersezione dei semipiani che individuano gli insiemi soluzione delle singole disequazione lineari I_1, I_2

$\begin{cases} y < -x + 2 \\ x - 2 - y > 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y > -x + 3 \\ y < -x - 1 \end{cases}$
	
La soluzione del sistema è la zona del piano evidenziata in rosso	Il sistema non ha soluzioni (le rette sono parallele)

<u>Esempi</u>

1. Determinare il dominio piano individuato da: $\begin{cases} y + x + 3 \geq 0 \\ y - x + 3 \geq 0 \\ -2x + 1 - y > 0 \\ y - 2x - 1 < 0 \end{cases}$

SOLUZIONE
Analizziamo le rette che definiscono la frontiera del dominio:
$y = - x - 3$: parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante che interseca l'asse delle y nel punto di coordinate (0,-3);
$y = x - 3$: parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante che interseca l'asse delle y nel punto di coordinate (0, -3);
$y = -3x + 1$: retta avente coefficiente angolare –3, che interseca l'asse delle y nel punto di coordinate (0,1);
$y = 3x + 1$: retta avente coefficiente angolare 3, simmetrica della precedente rispetto all'asse delle y, che interseca lo stesso asse nel punto di coordinate (0,1).
Rappresentiamo graficamente la frontiera ricordando che le coppie ordinate di punti che appartengono alle ultime due rette non sono incluse.

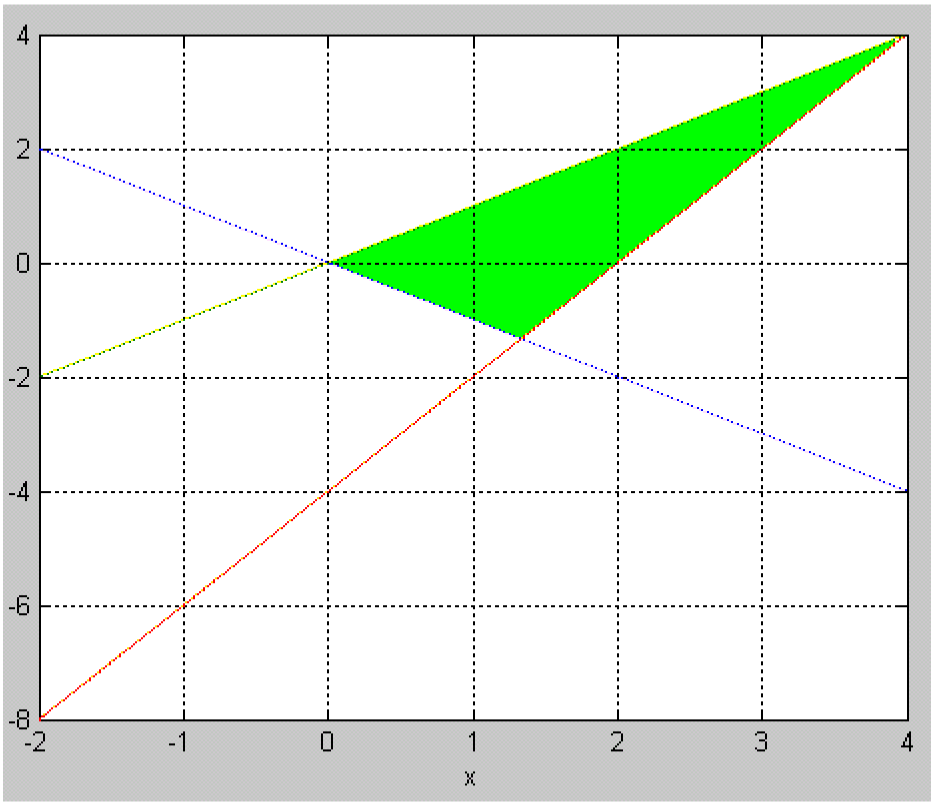


Il dominio richiesto è rappresentato dalla parte colorata.

2. Determinare il dominio piano individuato da: $\begin{cases} -x \leq y \leq x \\ x - 4 \leq 0 \\ 2x - 4 - y \leq 0 \end{cases}$.

SOLUZIONE

La frontiera di questo dominio è determinata da:
y = *x*: bisettrice del primo e terzo quadrante;
y = -*x*: bisettrice del secondo e quarto quadrante;
x = *4*: parallela all'asse delle y;
y = *2x – 4* : retta di coefficiente angolare 2, che interseca l'asse delle y nel punto di coordinate (0,-4).



Il dominio richiesto è dato dalla parte di piano colorata.

SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Per risolvere una *disequazione fratta*

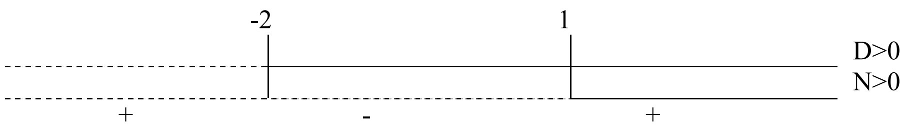
$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

si studiano separatamente i segni del numeratore *(N)* e del denominatore *(D)*, poi si determina il segno della frazione utilizzando la regola dei segni.
La frazione si annulla se e solo se il numeratore è 0; non esiste se il numeratore è nullo.

Esempio

$$\frac{x-1}{x+2} > 0;$$

$$N > 0; \quad x-1 > 0; \quad x > 1$$
$$D > 0; \quad x+2 > 0; \quad x > -2$$



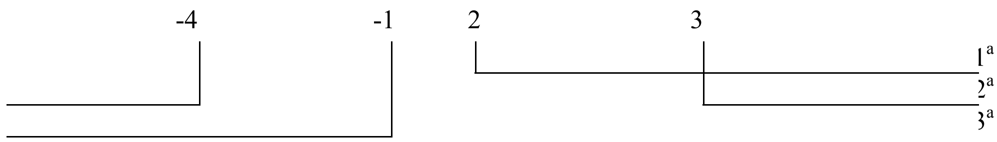
le soluzioni sono quindi $x < -2 \vee x > 1$

Per risolvere un *sistema di disequazioni* si risolvono le singole disequazioni; poi si determina in quali intervalli sono verificate contemporaneamente tutte le disequazioni.
Lo schema può essere il seguente:

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) < 0 \\ C(x) > 0 \end{cases}$$

Esempio

$$\begin{cases} x-2 > 0 \\ x^2 - x - 12 > 0 \\ x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 & & 1^a \\ x > 3 \quad x < -4 & & 2^a \\ x < -1 & & 3^a \end{cases}$$



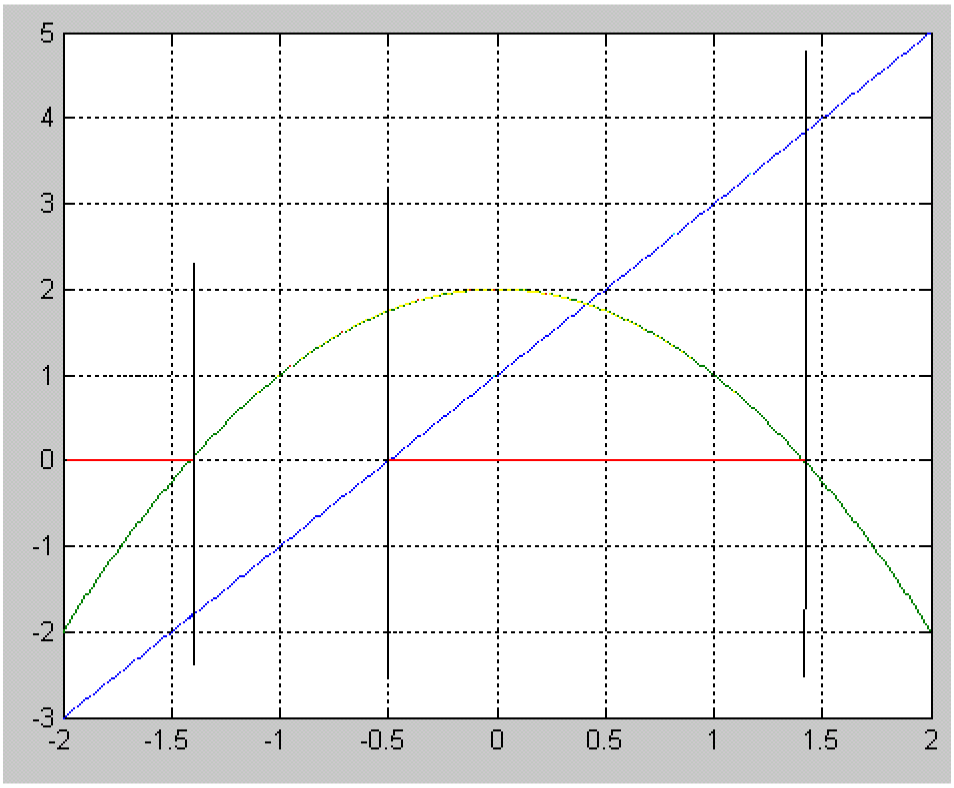
Sistema impossibile.

Per risolvere sistemi di disequazioni oppure disequazioni razionali fratte è possibile riferirsi alle rappresentazione grafiche delle curve coinvolte.

Ad esempio, risolviamo la disequazione $\dfrac{2x+1}{2-x^2} \geq 0$. (1)

L'interpretazione grafica della (1) è legata al seguente sistema: $\begin{cases} y_1 = 2x+1 \\ y_2 = 2-x^2 \\ \dfrac{y_1}{y_2} \geq 0 \end{cases}$.

Rappresentiamo le due curve: y_1 è una retta e y_2 è una parabola.



La retta interseca l'asse delle x nel punto x = – 0.5 , mentre la parabola nei punti x = - √2 e x = √2.
Dal grafico sopra indicato possiamo dedurre che:
per x < -√2 sia la retta che la parabola giacciono nel semipiano delle y negative, pertanto il loro rapporto positivo; per -√2 < x < - 0.5 la retta giace nel semipiano delle y negative, mentre la parabola giace nel semipiano positivo delle y, quindi il loro rapporto è negativo; per – 0.5 <x < √2 sia la parabola che la retta giacciono nel semipiano delle y positivo, quindi il loro rapporto è positivo; per x > √2 la parabola giace nel semipiano delle y negativo, mentre la retta in quello positivo, quindi il loro rapporto è negativo.
Fatte queste considerazioni, giungiamo alla soluzione (evidenziata in rosso sull'asse delle x):
$x < -\sqrt{2} \vee -0.5 \leq x < \sqrt{2}$, dove il valore x 0 – 0.5 è incluso in quanto annulla il numeratore.

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Risolvere le seguenti disequazioni:
   a. $x^2 + 2x - 15 > 0$
   b. $x^2 + 6x + 9 \leq 0$
   c. $(x^2 - 1)(x^2 - 5) \leq 0$
   d. $\dfrac{1-x}{2-x} \geq 0$

e. $\frac{3x^2+5x-1}{2x-1} \le x-2$

2. Scrivere una disequazione frazionaria che abbia come insieme delle soluzioni S = $\{-7 < x \le 0 \vee x \ge 1\}$.
3. Quali sono i valori di x affinché sia verificata 1/x < x ?

SOLUZIONE

1. a. $x < -5 \vee x > 3$; b. $x \neq -3$; c. $-\sqrt{5} \le x \le -1 \vee 1 \le x \le \sqrt{5}$; d. $x \le 1 \vee x > 2$; e. $x \le -5 - \sqrt{28} \vee -5 + \sqrt{28} \le x < ½$.

2. Può essere la disequazione $\frac{x(x-1)}{x+7} \ge 0$.
3. $-1 < x < 0 \vee x > 1$

APPENDICE

SISTEMI DI SECONDO GRADO

Nello studio delle equazioni delle rette nel piano cartesiano, abbiamo osservato che esiste una corrispondenza tra il problema geometrico *intersezione di due rette* e il problema algebrico *risoluzione di un sistema lineare*.
Questa corrispondenza può essere estesa anche al caso di un sistema di secondo grado. Il principio è del tutto generale: le coordinate di un punto di una curva sono soluzioni dell'equazione rappresentativa della curva. Se due curve hanno uno o più punti comuni, le coordinate di questi punti sono soluzioni del sistema delle equazioni delle curve.

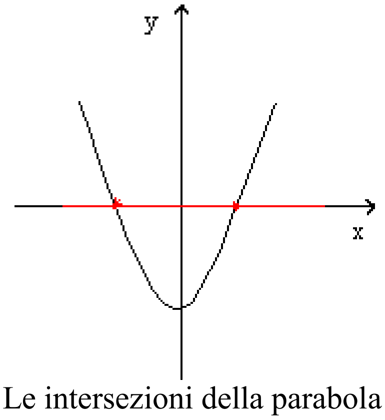
- Per la risoluzione algebrica si procede nel seguente modo:

a. si risolve l'equazione lineare rispetto ad un'incognita;
b. si sostituisce il valore dell'incognita così determinato nell'equazione di II grado (si ottiene un'equazione di secondo grado in una incognita che si chiama equazione risolvente del sistema);
c. si risolve l'equazione di secondo grado così ottenuta;
d. si sostituiscono i valori così determinati per l'incognita nell'equazione lineare;
e. si determinano i valori dell'altra variabile.

Casi particolari

Intersezione con l'asse delle x

Il sistema è: $\begin{cases} y = 0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$; l'equazione risolvente è $ax^2 + bx + c = 0$.

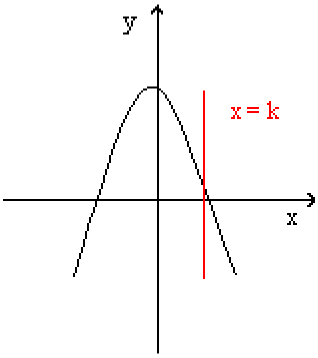


Le intersezioni della parabola con l'asse delle x sono (se esistono) le soluzioni dell'equazione di II grado. Si dice anche che sono **zeri** della funzione $y = ax^2 + bx + c$, cioè i punti in cui la funzione ha valore zero.

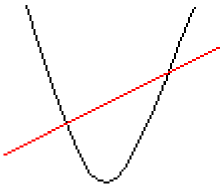
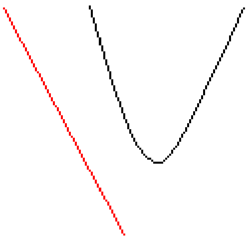
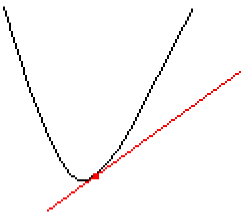
- Intersezione con una retta parallela all'asse delle y

Il sistema è $\begin{cases} x = k \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$.

Sostituendo ad x il valore k si trova un valore (ed uno solo) per y. Il sistema ha sempre una ed una sola soluzione: $(k, ak^2 + bk + c)$.



- Nel risolvere un sistema di secondo grado si ottiene un'equazione di secondo grado in un'incognita. Si hanno tre casi possibili.

Figura	**Segno di Δ**	**Esempi**
	$\Delta > 0$ L'equazione ha due soluzioni distinte. Anche il sistema ammette due soluzioni,quindi retta e parabola hanno due punti in comune (sono *secanti*).	$\begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = x^2 - 1 \end{cases}$ Equazione risolvente:$x^2 - 3x + 2 = 0$ $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$ Soluzioni: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $y_1 = 0$ $y_2 = 3$
	$\Delta < 0$ Non si hanno soluzioni reali. Il sistema è impossibile. Retta e parabola sono *esterne*.	$\begin{cases} y = -x - 3 \\ y = x^2 + 1 \end{cases}$ Equazione risolvente:$x^2 + x + 4 = 0$ $\Delta < 0$ Nessuna soluzione reale.
	$\Delta = 0$ Due soluzioni coincidenti. E' il caso di *tangenza* tra retta e parabola.	$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$ Equazione risolvente: $x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Delta = 4 - 4 = 0$ Infatti l'equazione risolvente si scrive nella forma: $(x-1)^2 = 0$ Soluzioni: $x_1 = x_2 = 1$ $y_1 = y_2 = -1$

Esempi

- Risolvere il seguente sistema di secondo grado e interpretarlo graficamente:

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x + 1 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Per la risoluzione algebrica di questo sistema si utilizza il metodo del confronto, visto che le due equazioni sono esplicitate nella variabile y.
Pertanto: $2x + 1 = x^2 + 2x +1 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ e $x = 0$. Abbiamo cioè due soluzioni coincidenti in $x = 0$. Deduciamo quindi che la retta di equazione $y = 2x +1$ è tangente alla parabola $y = (x+1)^2$ nel suo punto di ascissa nulla.
La verifica geometrica è associata alla determinazione del Δ dell'equazione di secondo grado ottenuta: l'equazione risolvente risulta: $x^2 = 0$, il cui valore di Δ è 0. Pertanto è verificata la conclusione precedente.
Le soluzioni del sistema sono: (0,1) ; (0,1).

- Determinare le intersezioni con l'asse delle ascisse della seguente parabola: $y = -x^2 + 7x -6$.

SOLUZIONE

Per determinare le intersezioni della parabola data con l'asse delle ascisse si risolve il seguente sistema: $\begin{cases} y = -x^2 + 7x - 6 \\ y = 0 \end{cases}$. Sempre utilizzando il metodo del confronto si ha: $-x^2 + 7x -6 = 0$ $\rightarrow$ $x^2 - 7x + 6 = 0 \rightarrow x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2}$ $\rightarrow x_1 = 6$ e $x_2 = 1$. Pertanto le soluzioni del sistema sono: (1,0) e (6,0). Come si può vedere dalla risolvente il Δ è positivo, quindi la retta è secante la parabola.

- Risolvere il sistema: $\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 5xy = 3x \\ x - y = 1 \end{cases}$.

SOLUZIONE

Questo sistema è di secondo grado ma non rientra nella trattazione posizione reciproca retta e parabola. Pertanto procediamo utilizzando uno dei metodi già analizzati in precedenza.
Si risolve la seconda equazione rispetto ad x: $x = 1 + y$; si sostituisce nella prima equazione: $(1+y)^2-2y^2+5(1+y)y=3(1+y)$; si riduce ora questa equazione in forma normale rispetto ad y: $4y^2 + 4y -2 = 0$; si ricavano ora i valori di y dall'equazione di secondo grado: $2y^2 + 2y -1 = 0$, ossia: $y_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ e $y_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ e si determinano i corrispondenti valori di x. Le soluzioni sono: $(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2})$ e $(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2})$.

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Risolvere i seguenti sistemi di secondo grado ed interpretarli graficamente:

a. $\begin{cases} y = 9x^2 + 5 \\ y - x - 3 = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 - 2x - y + 1 = 0 \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} y = x^2 - 8x + 16 \\ x - 5 = 0 \end{cases}$

2. Decidere la posizione delle seguenti coppie di curve (retta e parabola):
   a. $y = 2x$ e $y = -x^2 + 4$;
   b. $y = -x + 5$ e $y = x^2 - x + 5$;
   c. $y = -3x + 1$ e $y = 0.5\,x^2 - x + 4$

3. Risolvere il sistema di secondo grado:

$\begin{cases} x^2 + 2xy - 2y^2 = 13 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Soluzioni

1. a. ∅ (retta esterna alla parabola); b. (2,1) (2,1) (retta tangente alla parabola); c. (5,1) (retta secante la parabola).
2. a. secanti; b. tangenti; c. esterne
3. (3,1) e (-7,-9)

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. Rispondere Vero o Falso alle seguenti questioni:

a. se una retta è tangente ad una parabola, il sistema dello loro equazioni ha $\Delta > 0$ [F]

b. Se il vertice di una parabola ha ascissa *k*, la retta tangente alla parabola nel vertice ha equazione y = *k* . [F]

c. Un sistema di secondo grado ammette al massimo due soluzioni. [V]

d. In un sistema di secondo grado un'equazione ed una sola è di secondo grado. [V]

e. Un sistema di secondo grado è rappresentabile geometricamente solo come l'intersezione di una parabola con una retta. [F]

f. Le soluzioni di un sistema di secondo grado sono soluzioni di tutte le equazioni del sistema. [V]

g. Data la parabola di equazione $y = x^2 + 1$ e le rette y = k, se k = 1 allora la retta è tangente alla parabola nel suo vertice. [V]

l. Dato il sistema $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$ esso ammette come unica soluzione (-3,0). [V]

CAPITOLO 5

ESPONENZIALI E LOGARITMI

ESPONENZIALI

Teoria in sintesi

Potenze con esponente reale

La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{R}^+$
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in \mathbf{Z}$.

  - Sono definite:

    $\left(-\sqrt{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)$;

    $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2}$;

    $3^{-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3^{\sqrt{2}}}$.

  - Non sono definite:

    $\left(-2^{\sqrt{3}}\right)$; 0^0 ; 0^{-3}.

Casi particolari :

- $a = 1$, $1^x = 1$, per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$, per ogni $a \in \mathbf{R}^+$;

FUNZIONE ESPONENZIALE

Si chiama *funzione esponenziale* ogni funzione del tipo :

$$y = a^x \quad , \quad \text{con } a > 0 \text{ fissato}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

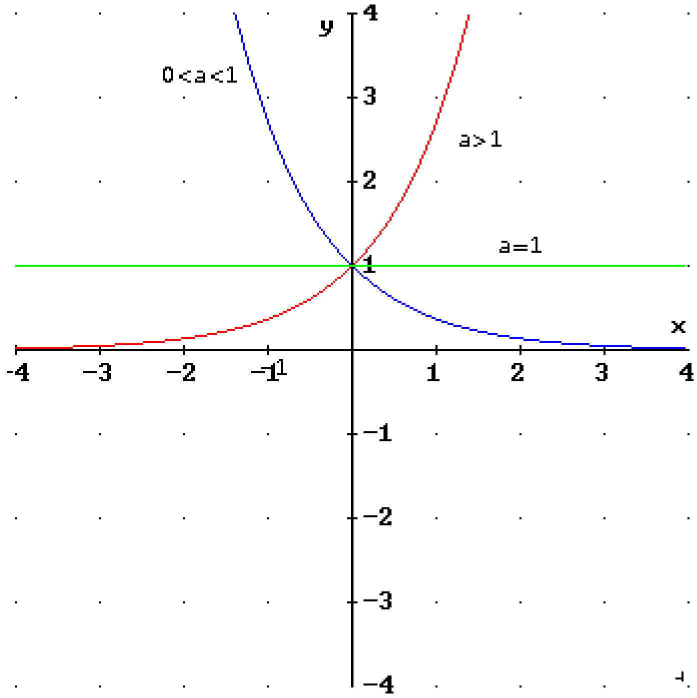
- Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è tutto $\mathbf{R}$;

- il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}^+$ (la funzione esponenziale è sempre strettamente positiva).

Si distinguono tre casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow a^x > a^y$;
- $a = 1$: funzione costante : $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow a^x < a^y$.

I seguenti grafici illustrano il comportamento della funzione esponenziale y=a^x nei vari casi



EQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMI

Teoria in sintesi

Un'equazione si dice *esponenziale* quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.

L'equazione esponenziale più semplice (elementare) è del tipo :

$$a^x = b \ , \ \text{con } a > 0 \ \text{ e } \ b > 0 \ ; \ x \ \text{ è } \ \text{l' incognita dell' equazione}.$$

Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere *impossibile, può ammettere come soluzione ogni valore di x reale*, o essere *determinata* :

- *impossibile* se $b \leq 0$, oppure $b \neq 1$ e $a = 1$; esempio: $2^x = -3$ oppure $1^x = 5$;
- *verificata da ogni valore reale di x* se $a = 1$, $b = 1$; esempio: $1^x = 1$;
- *determinata* se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$; esempio: $3^x = 5$.

Si chiama **logaritmo in base *a* di *b*** l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato, cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b .

$$a^{x} = b$$

$$\Updownarrow$$

$$x = log_{a} b$$

a = base dell'eponenziale e del logaritmo

Esempi:

1.Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se a e b si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti : $2^x = 8 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3$;
- se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi : $2^x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = log_2 3$.

2.Risolvere l'equazione esponenziale: $\dfrac{3^{2x}}{3} + 3 \cdot 3^{2x} - 3^{2x} = 1$

- $3^{2x} + 9 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^{2x} = 3$ Sommando otteniamo:
- $7 \cdot 3^{2x} = 3$
- $3^{2x} = \dfrac{3}{7}$ che, risolta utilizzando i logaritmi:
- $2x = \log_3 \dfrac{3}{7}$ e, quindi
- $x = \dfrac{1}{2} \log_3 \dfrac{3}{7}$

3.Risolvere l'equazione esponenziale: $\left(2^{x-1}\right)^x \cdot \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{8^{x+1}}$

utilizzando le proprietà delle potenze (vedi appendice), otteniamo:

- $2^{x^2-x} \cdot 2^{-2} = 8^{-x-1}$
- $2^{x^2-x-2} = \left(2^3\right)^{-x-1}$
- $2^{x^2-x-2} = 2^{-3x-3}$ dato che le basi sono uguali, possiamo uguagliare gli esponenti
- $x^2 - x - 2 = -3x - 3$ che è un'equazione di secondo grado in x
- $x^2 + 2x + 1 = 0$ le soluzioni sono quindi:
- $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$

4. Risolviamo l'equazione: $2^x + 2^{3-x} = 6$.

- Osserviamo che: $2^{3-x} = \dfrac{2^3}{2^x}$
- L'equazione assegnata è equivalente a: $2^x + \dfrac{8}{2^x} = 6 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{2^x \cdot 2^x + 8}{2^x} = \dfrac{6 \cdot 2^x}{2^x}$
- Il denominatore, essendo una funzione esponenziale, non può assumere il valore zero. Possiamo moltiplicare per 2^x entrambi i membri, ottenendo:
  $\left(2^x\right)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.

- Si vede chiaramente la struttura di equazione algebrica di II grado nell'incognita 2^x. Risolvendo tale equazione (può essere utile introdurre una variabile ausiliaria $z = 2^x$ per rendere più evidente la natura di equazione di secondo grado: $z^2 - 6z + 8 = 0$) si ha:

  $2^x = 2 \quad x = 1$ oppure

  $2^x = 4 \quad x = 2$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Tenendo presente che $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, scrivere le seguenti potenze sotto forma di radice:

a) $3^{\frac{5}{8}}$; $\quad 4^{\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$;

2. Scrivere le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

a) $\sqrt[6]{2^5}$; $\quad \sqrt[4]{243}$; $\quad \sqrt[4]{0.25}$;

3. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

a) $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\quad \left[\frac{9}{2}\right]$

b) $a^x \cdot a^{2x-1} = \frac{a^2}{\sqrt{a}}$ $\quad \left[\frac{5}{6}\right]$

c) $2^x + 2^{x+1} = 2^{x-1} + 7$ $\quad [1]$

d) $3 \cdot 5^x = 7$ $\quad \left[log_5 \frac{7}{3} = \frac{log 7 - log 3}{log 5}\right]$

e) $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = 3^{x-1}$ $\quad [-1; 2]$

SOLUZIONI

1.a) $\sqrt[8]{3^5}$ $\quad$ b) $\sqrt[3]{4^2}$ $\quad$ c) $\sqrt[2]{\frac{1}{3}}^{3}$

2.a) $2^{\frac{5}{6}}$ $\quad$ b) $3^{\frac{5}{4}}$ $\quad$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

3.a) $\left[\frac{9}{2}\right]$ $\quad$ b) [5/6] c) [1] $\quad$ d) $\left[\log_5 \frac{7}{3} = \frac{\log 7 - \log 3}{\log 5}\right]$

e)[-1,2]

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. Scrivere le seguenti potenze sotto forma di radice:

a) $2^{-\frac{4}{3}}$; $\quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}$; $\quad \left(\frac{11}{3}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. Scrivere le seguenti radici sotto forma di potenza con esponente razionale:

a) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$; $\sqrt[19]{\frac{1}{256}}$; $\sqrt[7]{\frac{1}{125}}$.

3. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali:

a. $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

b. $4^x = 2^x - 2$ [nessuna soluzione]

c. $3^x + 3^{1-x} = 4$ $[0; 1]$

d. $6 \cdot 2^x + 2^{-x} = 5$ $\left[-1; -\frac{log\,3}{log\,2}\right]$

e. $2^{2x+3} - 25 \cdot 2^x + 3 = 0$ $[-3; log_2 3]$

FUNZIONE LOGARITMICA

Teoria in sintesi

- Si chiama *funzione logaritmica* ogni funzione del tipo :

  $y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$ fissato, $x \in \mathbf{R}^+$

- La funzione logaritmica è l'inversa dell'esponenziale, pertanto *dominio* e *codominio* risultano scambiati rispetto a quelli della funzione esponenziale.

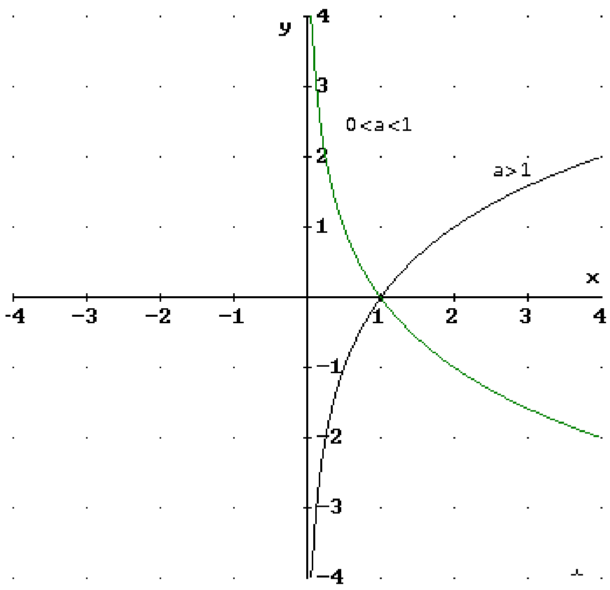
- Il *dominio* della funzione, cioè l'insieme dei valori che si possono attribuire a x è $\mathbf{R}^+$;

- il *codominio*, cioè l'insieme dei valori che la funzione assume è $\mathbf{R}$.

Si distinguono due casi:

- $a > 1$: funzione crescente : $x > y \Rightarrow log_a x > log_a y$;
- $0 < a < 1$: funzione decrescente : $x > y \Rightarrow log_a x < log_a y$;

I grafici della funzione logaritmica si ottengono da quelli della funzione esponenziale per simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante ($y = x$) ; i grafici che seguono illustrano il comportamento della funzione logaritmica $y = \log_a x$ nei due casi :



EQUAZIONI LOGARITMICHE

Teoria in sintesi

- Un'equazione si dice *logaritmica* quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.

- L'equazione logaritmica più semplice (elementare) è del tipo :

  $\log_a x = b$, con $a > 0$ e $b \in \mathbf{R}$; $x > 0$ è l'incognita dell'equazione.

- La sua soluzione, per quanto detto a proposito dell'equazione esponenziale, è : $x = a^b$.

Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $log_a A(x) = log_a B(x)$, applicando le proprietà dei logaritmi (vedi appendice)
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2 ;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

Esempi

1. Risolviamo l'equazione:
   $5 \cdot 3^x = 7$.

- Possiamo trasformare l'equazione eseguendo il logaritmo (in una base qualsiasi, per esempio in base 10) del primo e del secondo membro:
  $log\left(5 \cdot 3^x\right) = log\,7$.
- Applichiamo la proprietà 2) dei logaritmi: (appendice)
  $log\,5 + log\,3^x = log\,7$.

- Applichiamo la proprietà 1) dei logaritmi:
  $log\,5 + x \cdot log\,3 = log\,7$.
- Isolando x otteniamo:
  $$x = \frac{log\,7 - log\,5}{log\,3} \quad (*) .$$
- In alternativa potevamo isolare 3^x , ottenendo:
  $$3^x = \frac{7}{5} .$$
- Prendendo il logaritmo in base 3 di entrambi i membri si ha:
- $x = log_3 \frac{7}{5} = log_3 7 - log_3 5$
- Utilizzando la formula di cambiamento di base 4) si ottiene (*).

2. Risolviamo l'equazione logaritmica:
   $log_3(x+1) - log_3(x-2) = log_3 x - 2$.

- Imponiamo le condizioni di esistenza sui logaritmi dell'equazione data, ricordando che gli argomenti devono essere positivi:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-2>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x>2$$

- cioè alla variabile x si possono assegnare solo i valori maggiori di 2.
- Risolviamo l'equazione applicando la proprietà 3) dei logaritmi e osservando che $2 = log_3 3^2$:
  $$log_3\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = log_3\left(\frac{x}{3^2}\right)$$
- Uguagliando gli argomenti si ha la seguente equazione equivalente:
  $$\frac{x+1}{x-2} = \frac{x}{9} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 11x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{157}}{2} .$$
- Il valore $x = \dfrac{11 - \sqrt{157}}{2}$ è minore di 2, quindi non è compatibile con le condizioni di esistenza. L'unica soluzione dell'equazione è data da:
  $$x = \frac{11 + \sqrt{157}}{2} .$$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $\log_2(x-1) = 3$
b) $\log(x-2) - \log(x-1) = \log 5$
c) $2 \cdot \log_2 x = 2 + \log_2(x+3)$
d) $\log_3(x-1) = \frac{1}{2}\log_3 x$

SOLUZIONI

a)[9] b)[$\varnothing$] c)[6] d)$\left[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

Risolvi le seguenti equazioni logaritmiche:

a) $log(x-2)+log\,5=log\,x$ $\left[\dfrac{5}{2}\right]$

b) $log(x-1)-2\cdot log(x+1)-log\,8=-2$ $\left[\dfrac{3}{2};9\right]$

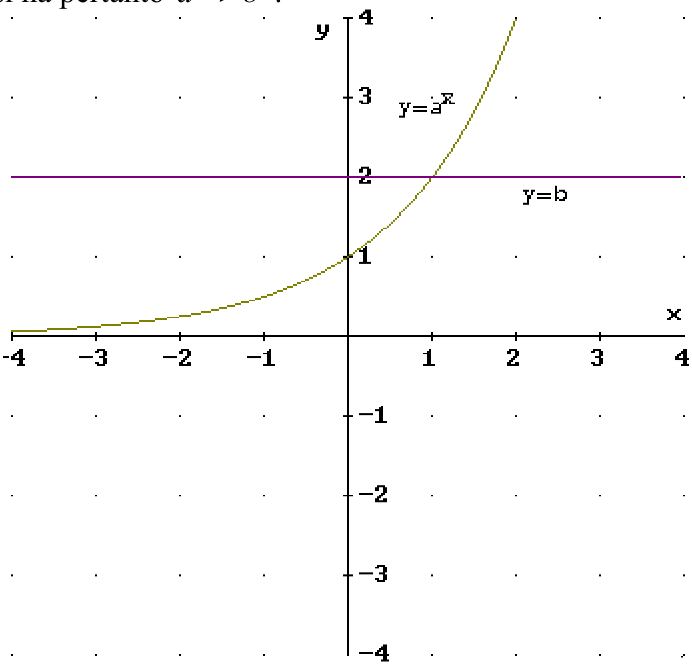
c) $3\log_9 x+\log_3 x=10$ $[8]$

d) $2\log_4 x+2\log_x 4-5=0$ $[2,16]$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

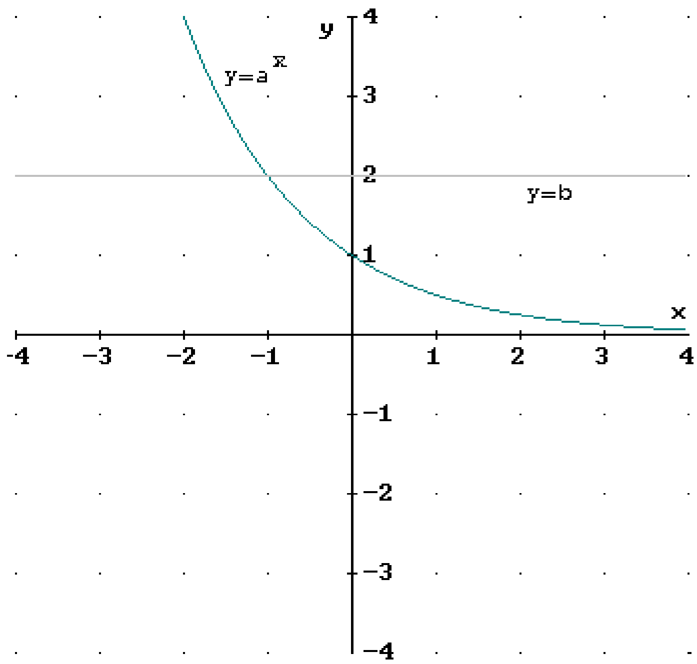
Teoria in sintesi

- Le disequazioni esponenziali si presentano nella forma: $a^x<b$ oppure $a^x>b$
- Risolvere queste disequazioni significa stabilire per quali valori di x la curva esponenziale si trova rispettivamente al di sotto o al di sopra della retta y=b:
- (1) Nel caso **a>1** si ha pertanto $a^x>b$:



e la disequazione risulta verificata per $x>\log_a b$.

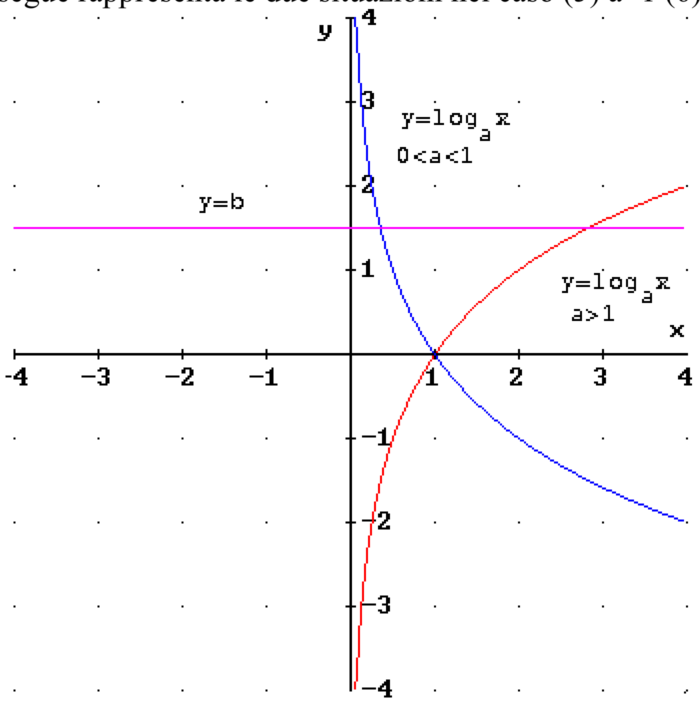
- (2) $a^x<b$ se $x<\log_a b$
- (3) Nel caso **0<a<1** abbiamo $a^x>b$ se:



e la disequazione è verificata per $x < \log_a b$

- (4) $a^x < b$, se $x > \log_a b$
- notiamo che, nel caso a>1, se b<0 (e cioè la retta si trova nel semipiano delle ordinate negative),la disequazione $a^x < b$ non ammette soluzioni reali , mentre la disequazione $a^x > b$ è verificata per ogni valore reale di x

Un discorso analogo vale per le disequazioni logaritmiche $\log_a x > b$ oppure $\log_a x < b$
Il grafico che segue rappresenta le due situazioni nel caso (5) a>1 (6) 0<a<1



- notiamo che le disequazioni logaritmiche $\log_a x > b$ o $\log_a x < b$ hanno soluzioni solo positive (x>0 per l'esistenza del logaritmo), mentre possono avere soluzioni per ogni valore reale di b

Esempi

Risolvere le disequazioni:

- $10^x > 25 \quad \Rightarrow x > \log_{10} 25$
- $10^x > -10 \Rightarrow \text{qualsiasi valore reale di x}$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{8} \quad \Rightarrow x < 3$ (la base dell'esponenziale è minore di 1, caso (3) della teoria in sintesi)
- $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > 25$. La disequazione è definita per ogni x≠0. La scriviamo come $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x+4}{x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ e, poiché la base è minore di 1, otteniamo : $\frac{x+4}{x} < -2$. Risolvendola : $\frac{x+4}{x} < \frac{-2x}{x} \Rightarrow \frac{x+4+2x}{x} < 0 \Rightarrow \frac{3x+4}{x} < 0 \Rightarrow N > 0 : x > -\frac{4}{3}, D > 0 : x > 0$
  da cui: $-\frac{4}{3} < x < 0$
- $\log_5 x < -10$
  $\Rightarrow x < 5^{-10}$ e, poiché x > 0 per l'esistenza del logaritmo, dovrà essere $0 < x < 5^{-10}$
- $\log_{\frac{1}{2}} x < 2 \Rightarrow x > \left(\frac{1}{2}\right)^2$ poiché la base del logaritmo è minore di 1 (caso (6) della teoria in sintesi)
- $\log_3(x+4) \geq \log_3(2x+3)$. Poniamo innanzitutto le condizioni di esistenza dei due logaritmi: $\begin{cases} x+4>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x>-\frac{3}{2} \end{cases}$ che, dovendo valere entrambe portano all'unica condizione: $x > -\frac{3}{2}$.
  Risolviamo ora la disequazione. Dato che la base è maggiore di 1, dovrà essere $x+4 \geq 2x+3$ che ha come soluzione $-x \geq -1$, cioè $x \leq 1$. Confrontando la soluzione ottenuta con le condizioni poste, si ha la soluzione della disequazione logaritmica data: $-\frac{3}{2} < x \leq 1$
- $\log_2{}^2 x - 6\log_2 x + 8 > 0$. Posto $y = \log_2 x$ e la condizione x>0 , si ottiene la disequazione $y^2 - 6y + 8 > 0$. Calcoliamo il $\Delta = 36 - 32 = 4$ e quindi le soluzioni sono: $y_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow y = 4 \ e \ y = 2$. Quindi la disequazione è verificata per y<2 o y>4.
  Dato che $y = \log_2 x$, dobbiamo risolvere le due disequazioni $\log_2 x < 2 \Rightarrow x < 4$ e $\log_2 x > 4 \Rightarrow x > 16$. Poiché avevamo la condizione x>0 posta sul logaritmo, le soluzioni sono: 0<x<4 e x>16

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Risolvere le disequazioni:

a. $2^{x+7} + 4 > 0$

b. $\frac{2^x - 1}{8 - 2^x} > 0$

c. $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

d. $(0.2)^{(x+1)^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+x^2}$

e. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) < 1$

f. $\log_{10} x - 1 > \dfrac{2}{\log_{10} x}$

g. $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 < 0$

SOLUZIONI

a. qualsiasi valore reale di b. 0<x<3 c. 1<x<3 d.x<1/4
e.x>2/3 f.1/10<x<1 ; x>100

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} > 1$ $\left[x > \log_2 \dfrac{2}{7}\right]$
2. $1 - 5^{x^2} \geq 0$ $[0]$
3. $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x - \dfrac{2}{5^{1-x}} > \dfrac{3}{5}$ $[x < 0]$
4. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ $[x > 2]$
5. $\sqrt{\log_{10} x} < 1$ $[1 < x < 10]$

APPENDICE

ESPONENZIALI

1.*proprietà delle potenze.* Le proprietà delle potenze valgono per esponenti reali:

Se $a > 0$, per ogni x, y appartenenti a **R** vale:

1. $\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$

LOGARITMI

1.*Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale, pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base a>0 , deve essere b>0 , inoltre valgono i casi particolari:* $log_a 1 = 0$, poichè $a^0 = 1$; $log_a a = 1$, poichè $a^1 = a$.

2.*Proprietà dei logaritmi.* Analogamente, alle proprietà degli esponenziali precedentemente elencate corrispondono le seguenti proprietà dei logaritmi:

1) $\log_a x^y = y \cdot \log x$ $\quad (x > 0 \; ; \; a > 0)$;
2) $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$ $\quad (x > 0 \; ; \; y > 0, a > 0)$;
3) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ $\quad (x > 0 \; ; \; y > 0, a > 0)$;
4) $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ $\quad (a, b, c > 0)$; formula di cambiamento di base nei logaritmi.

3. *I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base* $a = 10$ *oppure in base* $a = e \approx 2{,}718$ *:* $\log x$ *indica il* $\log_{10} x$ *, detto anche logaritmo decimale;* $\ln x$ *, indica il* $\log_e x$ *, detto anche logaritmo naturale o neperiano.*

CAPITOLO 6

TRIGONOMETRIA

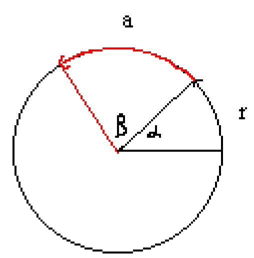
Teoria in sintesi

- Le principali unità di misura degli angoli piani sono: il grado sessagesimale (*deg* sulle calcolatrici), il grado centesimale (*grad* sulle calcolatrici) e l'angolo radiante (*rad* sulle calcolatrici). In matematica viene usata abitualmente la misura lineare degli angoli che ha come unità di misura il **radiante**.Tale modalità di misurazione si fonda sulla corrispondenza biunivoca che sussiste tra gli angoli al centro di una circonferenza e gli archi corrispondenti, e consente di trasferire il problema della misura di un angolo alla misura di un arco rettificato.

Si dice angolo **radiante** quell'angolo α al centro di una circonferenza che sottende un arco avente misura uguale al raggio. La **misura in radianti** di un generico angolo β è data dal rapporto β/α.

In base alla proporzionalità diretta tra angoli β al centro ed i relativi archi di lunghezza α in una circonferenza, possiamo scrivere:

$$\beta : \alpha = a : r$$



Dalla relazione sopra indicata si mette in evidenza che la misura in radianti di un angolo è uguale alla misura lineare di un arco, calcolata rispetto al raggio della circonferenza cui angolo ed arco appartengono.
Se β è l'angolo giro, allora l'arco *a* ad esso corrispondente è tutta la circonferenza: di conseguenza abbiamo la proporzione:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2\pi r}{r}$$

cioè:

$$\beta / \alpha = 2\pi$$

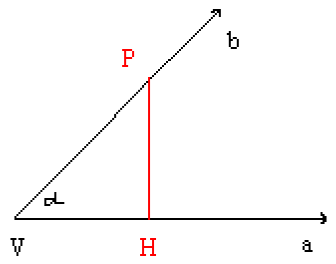
che indica che l'angolo giro è 2π volte l'angolo radiante.

- Stabilite le convenzioni di misura in radianti e ricordando che un angolo è definito positivo quando viene scelto il verso antiorario, consideriamo un angolo orientato α di vertice V e lati *a* e *b*. Preso sulla seconda semiretta un punto P arbitrario, purché distinto dal vertice V, proiettiamolo sulla prima semiretta *a*: sia H il piede della perpendicolare da P su *a*.

Consideriamo nel triangolo rettangolo VHP i rapporti fra i segmenti orientati:

<u>HP / VP VH / VP HP / VH</u>

Si dimostra che: *HP / VP VH / VP HP / VH* dipendono unicamente dall'angolo α e non dalla scelta del punto P sulla semiretta *b*.[1]



- I tre rapporti scritti in precedenza individuano allora tre funzioni dell'angolo α che vengono chiamate:

$\frac{HP}{VP} = sin\,\alpha$ $\frac{VH}{VP} = cos\,\alpha$ $\frac{HP}{VH} = tg\alpha$ (rispettivamente seno, coseno e tangente di α)

Passando dagli angoli alle loro misure relative dobbiamo sottolineare che: *la funzione tangente è definita per* $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in$ Z.

Ricordiamo che i valori per il quali tg α non è definita sono quelli che annullano la funzione coseno. Infatti vale la seguente identità:

tg α = sin α / cos α con $\alpha \neq \pi/2 + k\pi$ e $k \in$ Z

- Una relazione che riveste particolare importanza, essendo la versione goniometrica del teorema di Pitagora è l'identità fondamentale della trigonometria. Riferendosi alla figura precedente e applicando il teorema di Pitagora al triangolo VHP si ha: $(VH)^2 + (HP)^2 = (VP)^2$. Dividendo questa relazione per $(VP)^2$ (sempre nell'ipotesi P $\neq$ V) si ha:

$$\left(\frac{VH}{VP}\right)^2 + \left(\frac{HP}{VP}\right)^2 = 1$$

da cui:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

- Oltre ai rapporti definiti possiamo introdurre anche i loro reciproci, con i quali si ottengono funzioni che riportiamo nel seguente riquadro insieme ai valori di α per i quali esse non sono definite:

cosec α = 1 / sin α	$\alpha \neq k\pi$	con $k \in$ Z
sec α = 1 / cos α	$\alpha \neq \pi/2 + k\pi$	
cotg α = cos α / sin α	$\alpha \neq k\pi$	

(rispettivamente cosecante di α, secante di α, e cotangente di α)

[1] La dimostrazione è riportata nell'appendice a trigonometria.

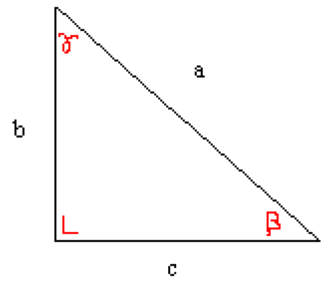
NOTO	**senα**	**cosα**	**tgα**
senα	senα	$\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$	$\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}}$
cosα	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	cosα	$\dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$
tgα	$\dfrac{\text{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$	tgα
cotgα	$\dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{\text{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\text{ctg}^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\text{ctg}\alpha}$

VALORI DELLE FUNZIONI GONIOMETRICHE DI ARCHI PARTICOLARI

α	**senα**	**cosα**	**tgα**
15° = π/12	$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$2-\sqrt{3}$
18° = π/10	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}}$
30° = π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45° = π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60° = π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90° = π/2	1	0	non esiste
180° = π	0	-1	0
270° = 3/2π	-1	0	non esiste
0° = 360° = 2π	0	1	0

ANGOLI COMPLEMENTARI, SUPPLEMENTARI ED ESPLEMENTARI

Consideriamo un triangolo rettangolo ABC di lati *a*, *b*, *c* ed angoli β e γ oltre all'angolo retto (come in figura).



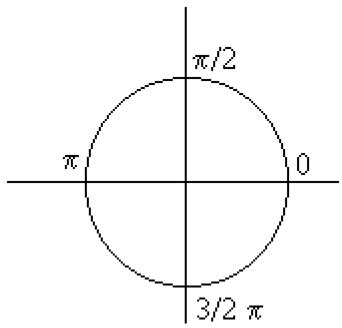
Si ha che $b/a = sin\ \beta$ e $b/a = cos\ \gamma$. Poiché il rapporto b/a è il medesimo deve valere la seguente relazione: sin β = cos γ. Ma β e γ sono angoli complementari, pertanto γ = π/2 - β; possiamo quindi riscrivere le relazioni sopra indicate così: $sin\ \beta = cos\ (\pi/2 - \beta)$ (1) . Uscendo dall'ambito geometrico strettamente determinato dai triangoli rettangoli e riferendosi ad angoli di misura relativa α qualsiasi non è difficile riconoscere che le relazione (1) continua a valere.

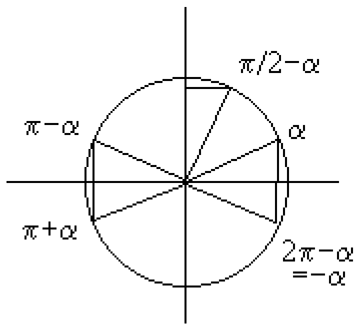
Angoli complementari: $sin\ \alpha = cos\ (\pi/2 - \alpha)$
$cos\ \alpha = sin\ (\pi/2 - \alpha)$

Da queste due si può ottenere la relazione per la tangente e la cotangente di angoli complementari: tg α = sin α / cos α = cos (π/2 - α) / sin (π/2 - α) = cotg (π/2 - α).

$tg\ \alpha = cotg\ (\pi/2 - \alpha)$ $\forall\ \alpha \neq \pi/2 + k\pi$
$cotg\ \alpha = tg\ (\pi/2 - \alpha)$ $\forall\ \alpha \neq k\pi$

Da evidenti simmetrie sulla circonferenza si deducono poi i valori delle funzioni trigonometriche di altri archi particolari.





Angoli supplementari: $sin\ \alpha = sin\ (\pi - \alpha)$
$cos\ \alpha = -\ cos\ (\pi - \alpha)$
$tg\ \alpha = -\ tg\ (\pi - \alpha)$

Angoli esplementari: $sin\ \alpha = -\ sin\ (2\pi - \alpha)$
$cos\ \alpha = cos\ (2\pi - \alpha)$
$tg\ \alpha = -\ tg\ (2\pi - \alpha)$

Angoli opposti: *$\sin \alpha = -\sin(-\alpha)$*
$\cos \alpha = \cos(-\alpha)$
$tg\ \alpha = -tg(-\alpha)$

Esempi

1. Si vuole calcolare la misura in radianti dell'angolo interno α del pentagono regolare.

SOLUZIONE

Da un teorema di geometria sappiamo che la somma degli angoli di un poligono è data da tanti angoli piatti quanti sono i lati meno due: dunque per un poligono di n lati, dà (n –2) angoli piatti. Nel nostro caso poiché si tratta di un poligono regolare di n = 5 lati e altrettanti angoli α, abbiamo: $5\ \alpha° = (5 - 2)\ 180°$, ovvero $\alpha° = 108°$. Per avere la misura di α in radianti, possiamo impostare proporzione:

$$108° : 180° = \alpha : \pi$$

da cui si ha: $\alpha = 3/5\ \pi$.

2. Quale relazione sussiste tra gli angoli che misurano (in gradi) $\alpha = 100°$ e $\beta = 460°$?

SOLUZIONE

Essi differiscono di un giro completo, pertanto diremo che α *è congruente* a β.

3. Gli angoli che misurano (in radianti) $\pi/2$ e $15/2\ \pi$ *sono congruenti*?

SOLUZIONE

Questi due angoli differiscono di 7π, ossia tre giri e mezzo, perciò non sono *congruenti*.

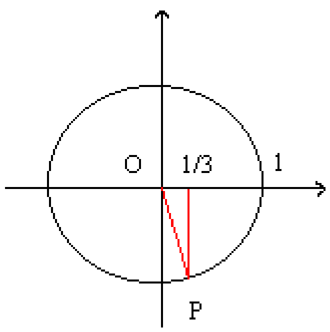
4. Determinare i valori delle funzioni dell'angolo α di cui è assegnato il coseno: $\cos \alpha = 1/3$, sapendo che $3/2\ \pi < \alpha < 2\pi$.

SOLUZIONE

L'intervallo a cui appartiene α ci dice che il suo seno e la sua tangente saranno negativi. Perciò la scelta del segno è stabilita.
Avremo:

$$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

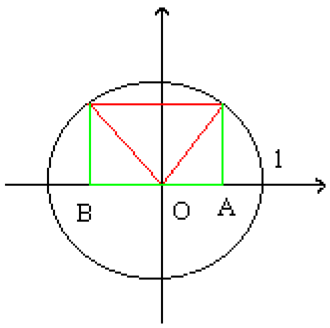
$$tg\ \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\ 3 = -2\sqrt{2}$$



5. Sapendo che sin α = $\frac{2}{\sqrt{5}}$, determinare i valori di cos α e tg α.

SOLUZIONE

Le informazioni che dà questo testo non sono sufficienti a determinare l'angolo α univocamente. Infatti dalla rappresentazione grafica emerge che abbiamo due angoli che soddisfano la relazione sin α = $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Il primo ha il valore del coseno pari alla distanza OA ed il secondo è la distanza OB, con segno negativo.



Avremo cioè:

$\cos \alpha_1 = + \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = 1/\sqrt{5}$ $\quad$ $\text{tg } \alpha_1 = 2/\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2$

$\cos \alpha_2 = - 1/\sqrt{5}$ $\quad$ $\text{tg } \alpha_2 = - 2.$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Dopo aver disegnato gli archi corrispondenti a cos α = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, trovare dell'arco nel quarto quadrante le altre funzioni trigonometriche.

2. Sapendo che α è acuto e positivo e che sen α = 3/5 calcolarne le altre funzioni trigonometriche.

3. Ragionando solo sulla circonferenza goniometrica completare con i segni > = < le seguenti:

$$sen\frac{\pi}{6}..........sen\frac{\pi}{6} + sen\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}..........\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}$$

$$sen\frac{\pi}{6} - sen\frac{\pi}{3}..........0$$

$$\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}..........0$$

4. Ragionando solo sulla circonferenza goniometrica provare che:

sen(π – α) = sen α

sen (π/2 – α) = cos α

$\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

5. Semplificare le seguenti espressioni:

   $tg(\pi + \alpha)sen(\pi-\alpha)\cos(\pi + \alpha) + tg^2(\pi-\alpha)\cos^2(-\alpha)=$

   $sen^4\alpha - sen^2\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha =$

6. Verificare le seguenti identità:
   a. $tg\,\alpha + cotg\,\alpha = 1/(\sin\alpha \cdot \cos\alpha)$
   b. $tg^2\,\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\,\alpha \cdot \sin^2\alpha$
   c. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{tg\alpha + 1}{tg\alpha - 1}$

SOLUZIONI

1. $\sin\alpha = -1/2$; $tg\,\alpha = -1/\sqrt{3}$; $cotg\,\alpha = -\sqrt{3}$
2. $\cos\alpha = 4/5$; $tg\,\alpha = 3/4$; $cotg\,\alpha = 4/3$
3. a. < b. < c. < d. >

5. a. 0 b. 0

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. Senza usare la calcolatrice, utilizzando le funzioni degli angoli noti, calcolare il valore delle seguenti espressioni:
   a. $\sin(3/4\,\pi)\cos(\pi/3) - tg(\pi/6)\,tg(4/3\,\pi)$ [$\sqrt{2}/4 - 1$]
   b. $\sqrt{2}\cos(\pi/4) + 2\sqrt{3}\sin(\pi/3)$ [4]
   c. $\dfrac{\sin^2(7/6\pi) + \cos^2(-7/3\pi)}{tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})\cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + cot\,g(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{3})}$ [$(2\sqrt{3} - 1)^{-1}$]

2. Determinare per quali valori del parametro reale *k* hanno significato le seguenti relazioni. Calcolare poi le restanti funzioni dell'angolo.
   a. $\sin\alpha = k^2 - 4$ [$-\sqrt{5} \le k \le -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} \le k \le \sqrt{5}$]
   b. $\cos\alpha = 2 - \sqrt{k}$ [$1 \le k \le 9$]
   c. $\cos\alpha = 1 - 2/k$ $\quad \pi < \alpha < 1.5\,\pi$ [$1 < k < 2$]
   d. $tg\,\alpha = k^2 - 2k$ $\quad 1.5\,\pi < \alpha \le 2\pi$ [$0 \le k \le 2$]

3. Utilizzando le relazioni fra le funzioni di angoli associati, semplificare le seguenti espressioni, trasformandole in modo che contengano il solo argomento α:

a. $\sin(\pi + \alpha) \cdot \sin(\pi - \alpha) + \sin(\pi/2 - \alpha) \cdot \cos(-\alpha) + 1$ [$2\cos^2\alpha$]
b. $(tg\,\alpha + 1)\,(-1 - tg(\pi - \alpha)) + 2\cos^2(\pi/2 - \alpha) + 2\cos^2(\alpha - 3\pi)$ [$(\cos\alpha)^{-2}$]
c. $\dfrac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}{tg(\pi + \alpha)} + tg\alpha + \dfrac{1 + \cos(5\pi + \alpha)}{\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$ [$\sin\alpha$]

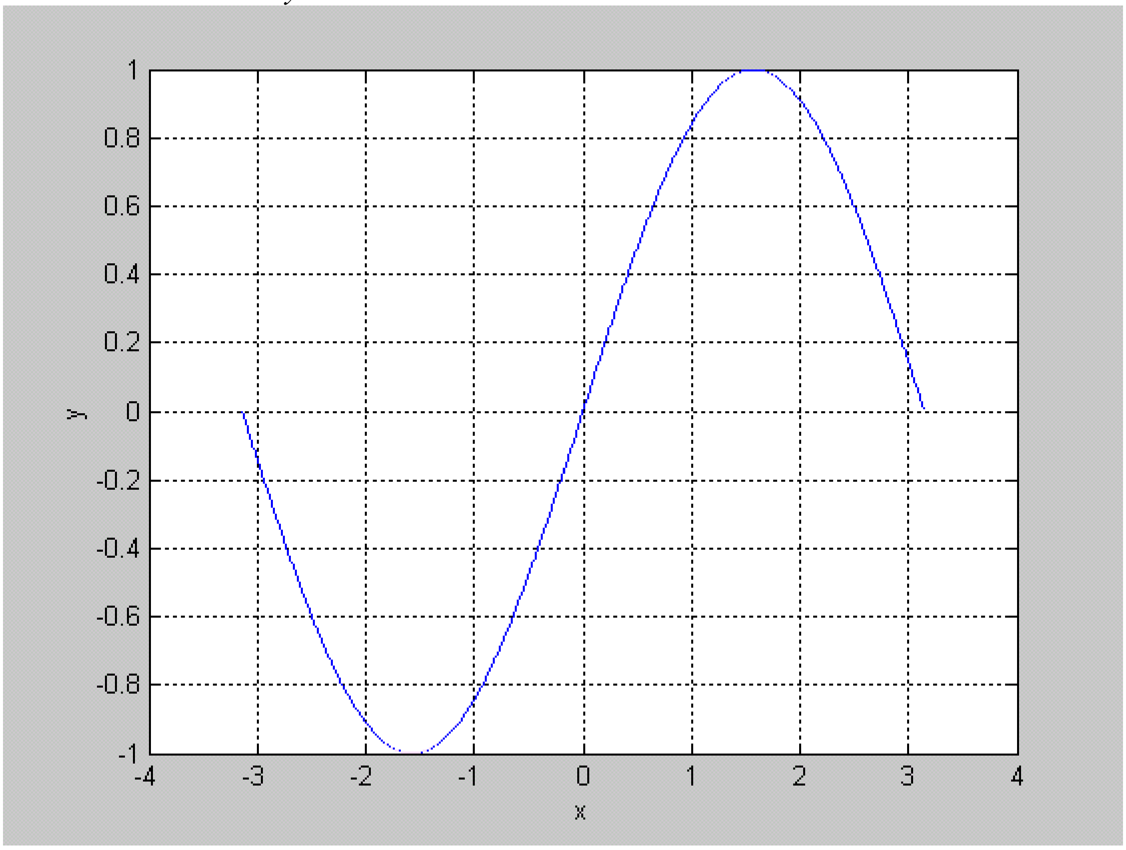
4. Stabilire quali relazioni devono valere tra gli angoli α e β affinché valgano le seguenti uguaglianze:

a. $\sin\alpha - \cos\beta = 0$ [$\alpha + \beta = \pi/2 + 2k\pi \vee \alpha - \beta = \pi/2 + 2k\pi$]
b. $\sin\alpha + \cos\beta = 0$ [$\alpha - \beta = -\pi/2 + 2k\pi \vee \alpha + \beta = 3/2\,\pi + 2k\pi$]
c. $tg\,\alpha + tg\,\beta = 0$ [$\alpha = -\beta + k\pi$]

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Con le scelte fatte sulla definizione dell'angolo, possiamo considerare le funzioni goniometriche come *funzioni reali di variabile reale*, scriverne le equazioni nelle abituali denominazioni delle variabili $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$…. e rappresentarne i grafici in un sistema di riferimento *xOy monometrico*.

- Cominciamo con $y = \sin x$.



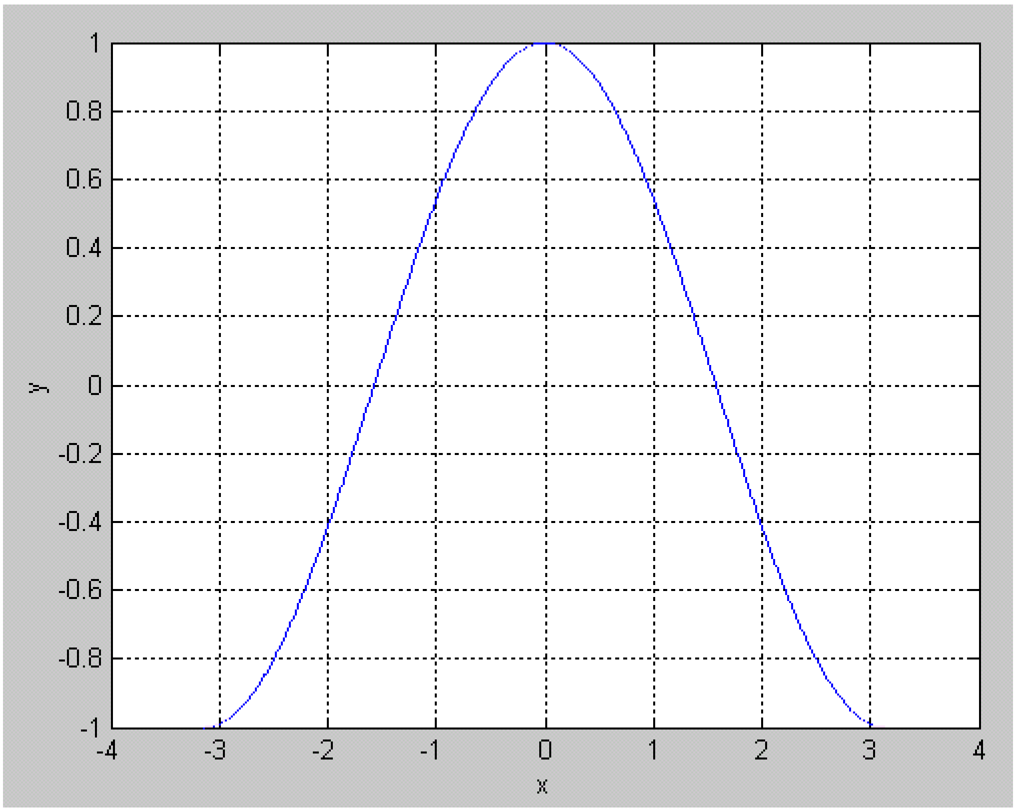
La curva rappresentata viene chiamata *sinusoide*.
Vediamo alcune caratteristiche interessanti.

- **Periodicità**: la funzione è stata rappresentata per $x \in [-\pi,\pi]$, intervallo di ampiezza pari a 2π. Pertanto il periodo della funzione è $T = 2\pi$. La parte di grafico nella semiretta delle ascisse negative va interpretata come inversione del verso di rotazione sulla circonferenza goniometrica.
- **Limitatezza**: il codominio della funzione non può assumere valori al di fuori dell'intervallo $y \in [-1, 1]$. Questa caratteristica si esprime dicendo che $y = \sin x$ è una funzione limitata: il valore -1 è il minimo ed il valore 1 è il massimo, tra quelli che essa può assumere.
- **Estremanti:** per la periodicità della funzione ci sono infiniti punti in cui essa assume il valore di massimo, di ascissa $x = \pi/2 + 2k\pi$ con $k \in Z$, e infiniti punti in cui essa assume il valore di minimo, di ascissa $x = -\pi/2 + 2k\pi$ con $k \in Z$
- **Zeri**: sono da segnalare anche gli infiniti punti in cui la sinusoide interseca l'asse delle ascisse, ovvero gli infiniti zeri della funzione $y = \sin x$, di ascissa $x = k\pi$, con k intero relativo.
- **Simmetrie**: la sinusoide ha molte simmetrie assiali e centrali: evidenziamo solo le due più significative.

a. la curva è simmetrica rispetto all'origine O: infatti la funzione seno è *dispari* e $\forall x \in R$ vale: $\sin(- x) = - \sin x$;

b. il grafico è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = \pi/2$. infatti secondo la relazione tra gli archi supplementari, vale: $\forall x \in R$, $\sin(\pi - x) = \sin x$. Ora, gli archi $\alpha_1 = \pi - x$ e $\alpha_2 = x$ sono simmetrici rispetto a $x = \pi/2$, che è il loro punto medio: $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 = \pi/2$.

Rappresentiamo ora la funzione $y = \cos x$:



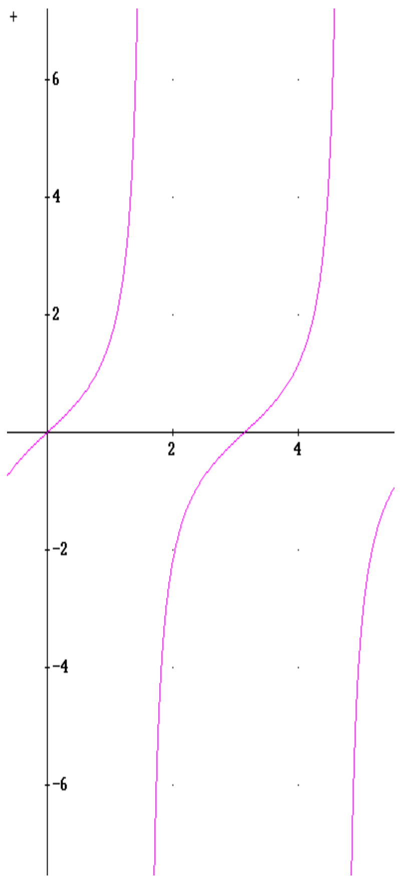
Potremmo seguire il procedimento adottato per la funzione seno in riferimento alla circonferenza goniometrica. Ma ricordiamo l'identità trovata nel paragrafo precedente:

$$\forall x \in R \text{ vale: } \cos x = \sin(x + \pi/2)$$

Quindi il grafico della funzione coseno può essere ottenuto dal grafico della sinusoide mediante l'applicazione di una traslazione di vettore **v** $(-\pi/2, 0)$.

La curva ottenuta viene chiamata cosinusoide. La simmetria della sinusoide rispetto alla retta $x = \pi/2$ si trasforma nella simmetria della cosinusoide rispetto all'asse delle ordinate, ossia al fatto che la funzione coseno è una funzione pari, per la quale vale: $\forall x \in R$: $\cos(-x) = \cos x$.
Anche le altre proprietà della funzione coseno sono ereditate dalla funzione seno.

Analizziamo ora il grafico della funzione y = tg x:

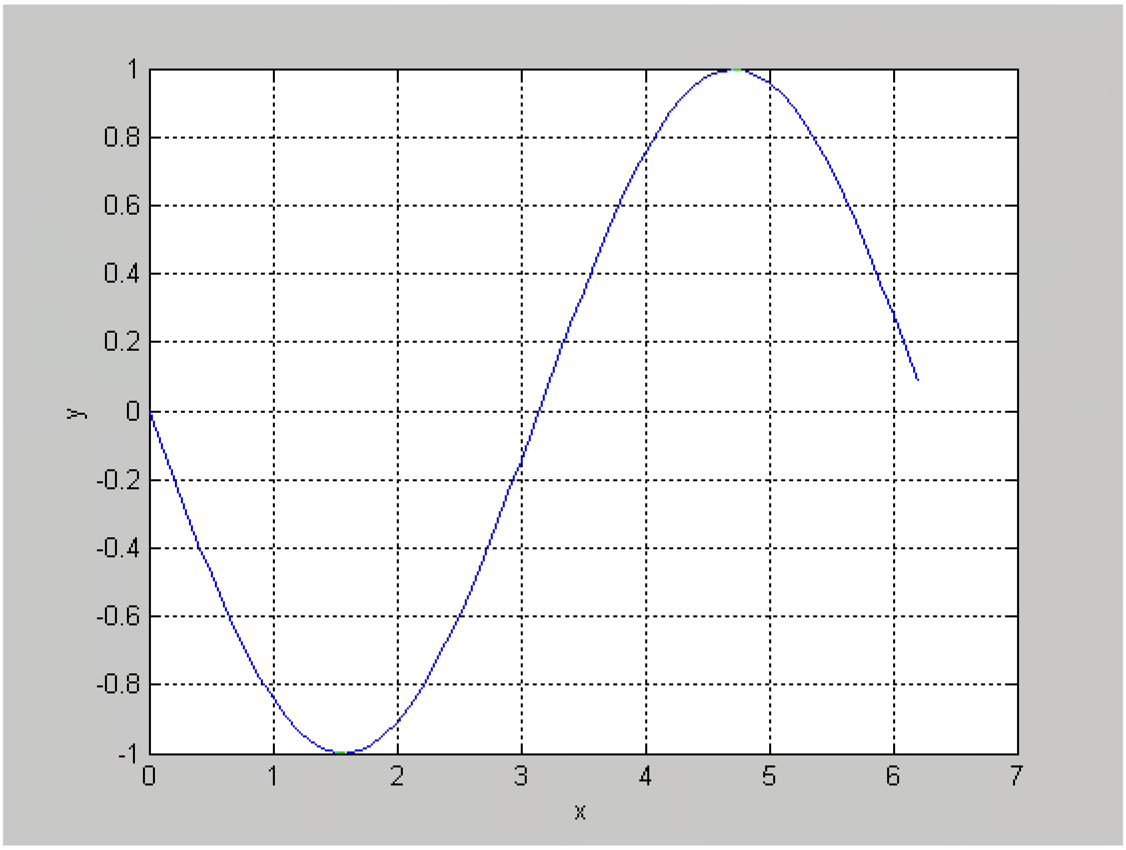


- **non è limitata:** e il suo codominio è tutto l'asse reale;
- **non ha estremanti**
- **non è definita in x = π/2**: perciò anche il dominio non sarà costituito da tutto l'asse reale.
- **Periodicità**: T = π;
- **Dominio**: D = $\left\{ x \in R : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \right\}$
- **Codominio**: C = R
- **Zeri**: $x = k\pi$, con $k \in$ Z
- In corrispondenza dei valori esclusi dal dominio, abbiamo che tutte le rette di equazioni $x = \pi/2 + k\pi$ sono **asintoti verticali** per la funzione
- Ogni zero della funzione è anche centro di simmetria per il suo grafico; in particolare questo è simmetrico rispetto all'origine: vuol dire che la funzione tangente è dispari:
  $\forall x \neq \pi/2 + k\pi$ vale $tg\,(-x) = -\,tg\,x$.

<u>Esempi</u>

- Rappresentare il grafico della funzione $y = sin\,(x - \pi)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Il grafico della funzione data si costruisce a partire dal grafico della funzione $y = sin\,x$ a cui si è applicata una traslazione di vettore **v** $(\pi,0)$.
Ossia:

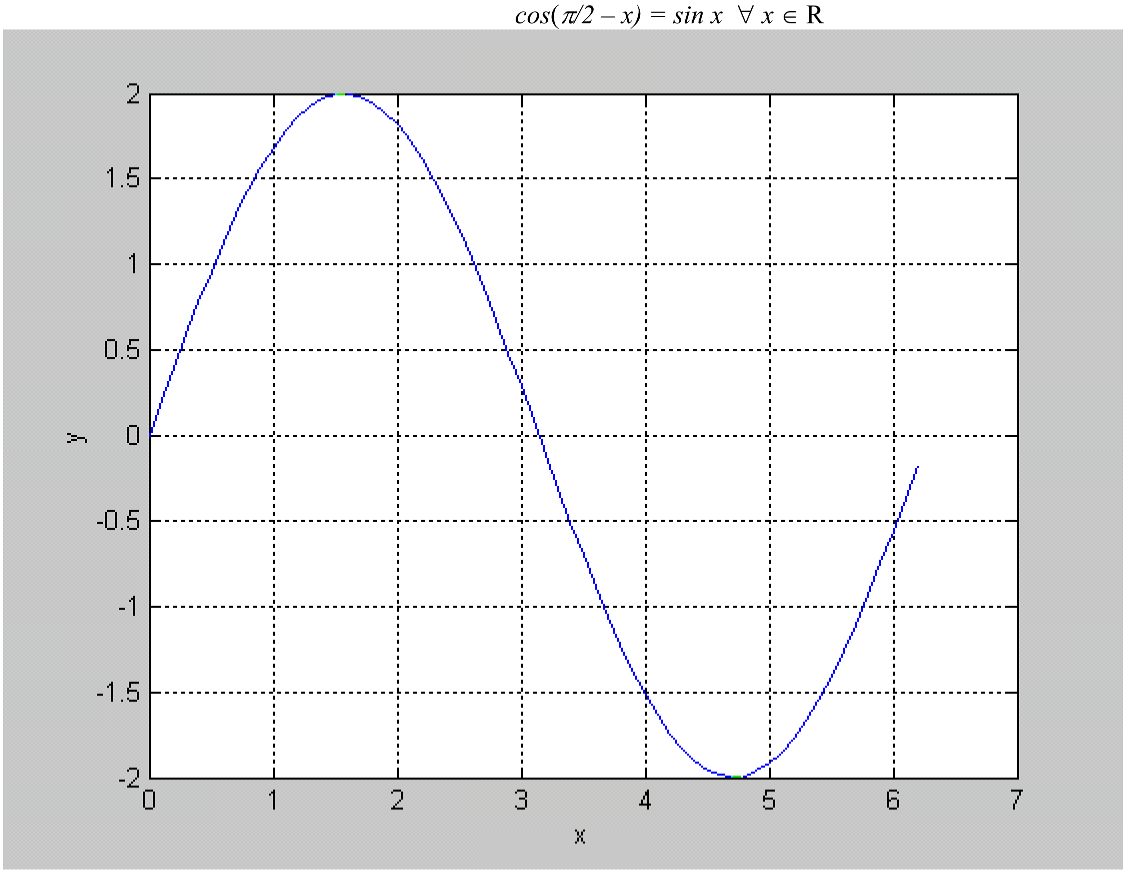


Questo è il grafico della funzione $y = - \sin x$. Per verificare la validità dell'affermazione, si consideri l'identità: $\sin (x - \pi) = \sin (- (\pi - x)) = - \sin(\pi - x) = - \sin x$ per ogni x reale.

- Rappresentare il grafico della funzione $y = 2 \cos (\pi/2 - x)$ per $x \in [0, 2\pi]$.

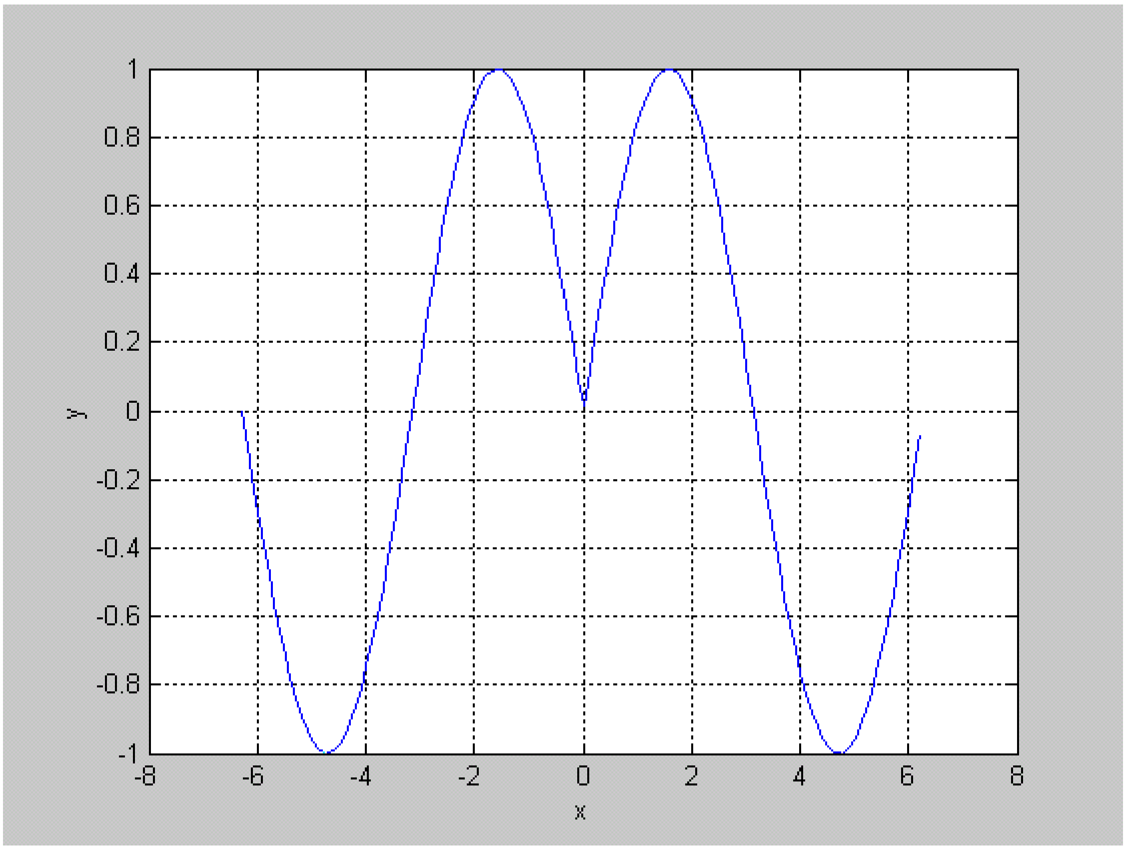
Il grafico della funzione proposta si ottiene dal grafico di $y = \cos x$ mediante una traslazione di vettore **v** $(\pi/2, 0)$ e una dilatazione di 2 unità lungo l'asse delle y. Si vuole ricordare che la funzione coseno è una funzione pari e che vale l'identità:

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin x \quad \forall\, x \in \mathrm{R}$$



- Rappresentare la funzione $y = \sin |x|$ in $x \in [-2\pi, 2\pi]$.

Il grafico della funzione indicata si determina a partire dal grafico della funzione $y = \sin x$, ribaltando nel semipiano delle x negative la parte di grafico che sta nel semipiano delle $x \geq 0$.



TEST DI AUTOVALUTAZIONE

Rappresentare i grafici delle seguenti funzioni goniometriche per $x \in [- 2\pi, 2\pi]$ avendo cura di indicare da quale grafico si deduce e quali sono le trasformazioni applicate:

a. $y = - \sin (\pi/2 - x)$
b. $y = \cos |x|$
c. $y = tg(\pi/2 - x)$
d. $y = 1-\cos(x - \pi)$

SOLUZIONI

a. $y = \sin x$: traslazione di vettore **v**($\pi/2, 0$) e riflessione rispetto all'asse delle x;
b. $y = \cos x$: riflessione nel semipiano delle $x < 0$ della parte di grafico che sta nel semipiano delle $x \geq 0$;
c. $y = tg\, x$: riflessione rispetto all'asse delle x e traslazione di vettore **v**($\pi/2, 0$);
d. $y = \cos x$: traslazione di vettore **v**($\pi, 0$), riflessione rispetto all'asse delle x e traslazione di vettore **v**($1, 0$).

ESERCIZI DI APPROFONDIMENTO

1. La funzione $y = \sin x$ è una funzione:

a. limitata, ossia il suo codominio è [-1,1];
b. illimitata;
c. sempre positiva;

d. sempre negativa. [a]

2. La funzione $y = cos\ (\pi/2 - x)$
a. è definita solo per $x \in [-\pi/2,\ 3/2\ \pi]$;
b. è periodica di periodo $T = \pi$;
c. è per ogni x la funzione $y = sin\ x$;
d. è illimitata [c]

3. La determinazione delle funzioni $y = cos\ x$ e $y = sin\ x$:
a. è legata alla misura dell'angolo in radianti;
b. dipende sia dalla definizione della misura lineare dell'angolo, che dal suo orientamento, positivo in senso antiorario e negativo in senso orario;
c. non dipende dall'angolo scelto;
d. nessuna delle precedenti risposte è corretta. [b]

4. La funzione $y = tg\ x$:
a. è illimitata;
b. esiste per ogni valore di x reale;
c. ha $x = \pi/2$ come unico asintoto verticale. [a]

5. L'espressione $sin\ \alpha = 3k - 1$ con k reale ha senso se:
a. $2 < k < 3$;
b. $1 < k < 4/3$;
c. $1 \leq k \leq 2$;
d. $0 \leq k \leq 2/3$. [d]

6. Il grafico della funzione $y = sin\ (x + \pi/4)$:
a. è ottenuto dal grafico di $y = sin\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/4,\ 0)$
b. è ottenuto dal grafico di $y = sin\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi,\ 0)$
c. è ottenuto dal grafico di $y = sin\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(-\pi/4,\ 0)$
d. è ottenuto dal grafico di $y = sin\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(-\pi/2,\ 0)$
[c]

7. Il grafico della funzione $y = 3\ cos\ x$:
a. è ottenuto dal grafico di $y = sin\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/4,\ 0)$
b. è ottenuto dal grafico di $y = cos\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi,\ 0)$
c. è ottenuto dal grafico di $y = cos\ x$ mediante una dilatazione di 1/3 sull'asse y
d. è ottenuto dal grafico di $y = cos\ x$ mediante una dilatazione di 3 sull'asse y.
[d]

8. Il grafico della funzione $y = cos\ 2x$:
a. è ottenuto dal grafico di $y = cos\ x$ mediante una dilatazione di ½ sull'asse x
b. è ottenuto dal grafico di $y = cos\ x$ mediante una dilatazione di 2 sull'asse x
c. è ottenuto dal grafico di $y = cos\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/4,\ 0)$
d. è ottenuto dal grafico di $y = sin\ x$ mediante una traslazione di vettore $\mathbf{v}(\pi/2,\ 0)$
[a]

9. La funzione $y = cotg\ x$:
a. è l'inversa della funzione $y = tg\ x$
b. è la reciproca della funzione $y = tg\ x$
c. è limitata
d. nessuna delle precedenti risposte è corretta.
[b]

10. La funzione $y = 1/\ sin\ x$
a. è limitata tra $[-1,1]$ visto che lo è la funzione $y = sin\ x$
b. è sempre definita per ogni valore di x reale
c. è illimitata
d. essendo $-1 \leq\ sin\ x \leq 1$, la funzione sarà definita per $y < -1 \vee\ y > 1$.
[c]

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

- *PRIMO GRADO, elementari*

sinx = h
cosx = h
con $h \in [-1, 1]$

Ricordando la definizione delle funzioni *sinx* e *cosx* queste equazioni si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) con l'equazione

1. $y = h$
2. $x = h$

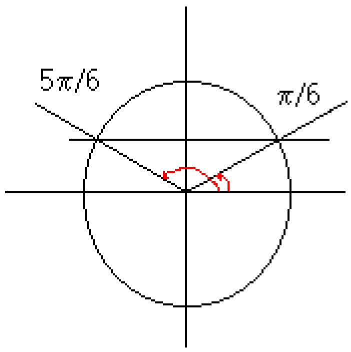
(che rappresenta una retta)

Esempio

- sen x = ½

Può essere interpretata come : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$

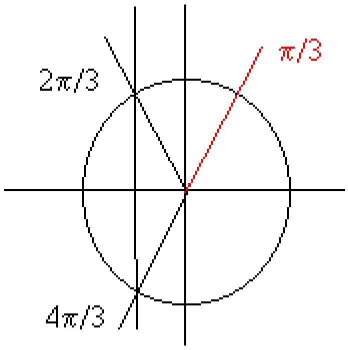
disegnando la circonferenza goniometrica e la retta y = 1/2 si ha:



I punti di intersezione sono posizionati nel primo quadrante: x = π/6,
e nel secondo, x = π – π/6 = 5π/6
In questo modo abbiamo trovato le due soluzioni, ma ricordando che la funzione seno è periodica di periodo 2π se voglio ottenere tutte le soluzioni dell'equazione ho:
x = π/6 + 2kπ,
x = 5π/6 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$

- cos x = -1/2

Disegnando la circonferenza goniometrica e la retta x = -1/2 si ha:



In questo caso i punti di intersezione sono posti nel secondo e terzo quadrante.
L'arco con cos x = + ½ è x = π/3,
quindi quello posto nel secondo quadrante sarà
x = π – π/3 = 2/3 π
mentre quello nel terzo quadrante sarà.
x = π + π/3 = 4/3 π
Le soluzioni sono quindi, tenendo conte del periodo:
x = 2/3 π +2kπ,
x = 4/3 π +2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- *PRIMO GRADO, lineari*

3. asenx + bcosx = h

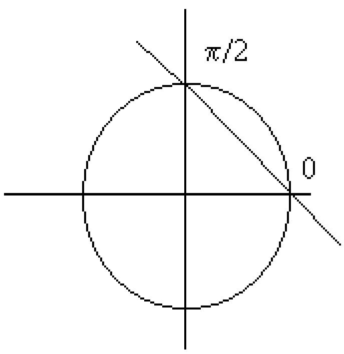
Si risolvono intersecando la circonferenza (di equazione $x^2 + y^2 = 1$) con l'equazione

ay + bx =h(che rappresenta una retta)

<u>Esempi</u>

- senx + cos x =1

Si pone *y = senx, x= cosx* e si interseca la retta *y = -x + 1* così ottenuta con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$



Si ottengono i punti (0,1) e (1,0) che corrispondono alle soluzioni x = 0, x = π/2

considerando poi il periodo si ha:x = 0 + 2kπ, x = π/2 + 2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

➢ *SECONDO GRADO*

1. Se l'equazione data contiene <u>una sola funzione trigonometrica</u> si risolve mediante la **formula generale delle equazioni di secondo grado**, ossia $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
2. Se contiene più di una funzione si cerca, mediante le formule viste precedentemente, di trasformarla in una che contenga una sola funzione trigonometrica.

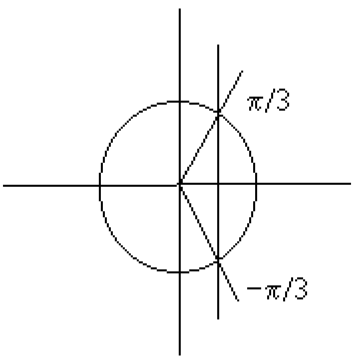
<u>Esempio</u>

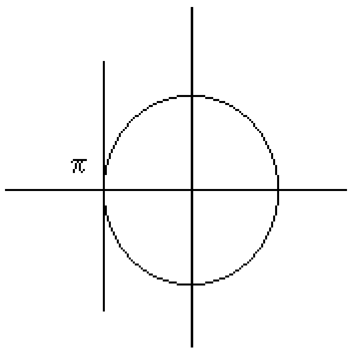
- $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

Applicando la formula risolutiva si ha:

$$\cos x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -1; 1/2$$

ora risolvo le equazioni cos x = ½, cos x = -1





x = π/3 +2kπ, x = π +2kπ,

x = -π/3 +2kπ, con $k \in \mathbf{Z}$.

- Risolvere : $cos^2x - sen^2x + cos\ x = 0$

E' di secondo grado, ed in essa non compare una sola funzione goniometrica; ricordando che

$sen^2x = 1 - cos^2x$ si ha:

$cos^2x - 1 + cos^2x + cos\ x = 0$

$2\ cos^2x + cos\ x - 1 = 0$

da cui si ottiene l'equazione precedente .

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Risolvere le seguenti equazioni:
   a. sen $(2x - \pi/2) = ½$
   b. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
   c. $\cos x = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$
   d. sen $(\pi/4 + x)$ + sen $(\pi/4 - x) = 1$
   e. sen x = sen 2x
   f. $2 \cos x + 2 \text{ sen } x = \sqrt{3} + 1$

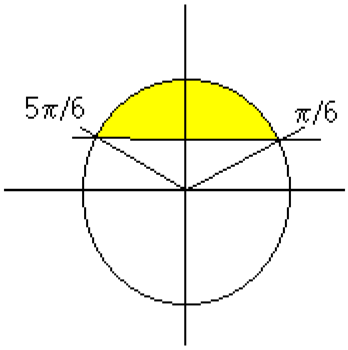
SOLUZIONI

a. $[x = \pi/3 + 2k\pi, \; x = 2\pi/3 + 2k\pi]$
b. $[x = 2k\pi, \; x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi]$
c. $[x = \pi + 2k\pi, \; x = \pm\pi/3 + 2k\pi]$
d. $[x = \pm\pi/4 + 2k\pi]$
e. $[x = k\pi, \; x = \pm\pi/3 + 2k\pi]$
f. $[x = \pi/6 + 2k\pi, \; x = \pi/3 + 2k\pi]$

RISOLUZIONE DI DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

DISEQUAZIONI ELEMENTARI

Consideriamo ad esempio la disequazione sen x > ½



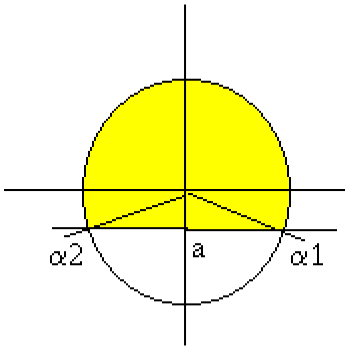
Disegnando la circonferenza e la retta y = ½ cerco tutti gli archi per cui l'ordinata è maggiore di ½, ed ottengo la soluzione

$$\pi/6 + 2k\pi < x < 5\pi/6 + 2k\pi, \text{ con } k \in \mathbf{Z}.$$

quindi ricordando che $-1 \le \text{sen}\,\alpha \le 1; \quad -1 \le \cos\alpha \le 1$

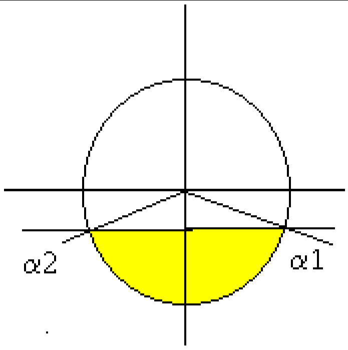
Disequazione: $\text{sen}\, x > a$

$a \ge 1$: impossibile
$a < -1$: sempre vera
$a = -1$: vera $\forall x \ne \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$
$-1 < a < 1$: $\alpha 1 + 2k\pi < x < \alpha 2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



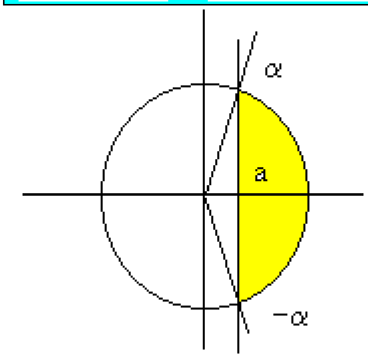
Disequazione $\operatorname{sen} x < a$

$a \le -1$:	impossibile
$a > 1$:	sempre vera
$a = 1$:	vera $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$\alpha 2 + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha 2 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



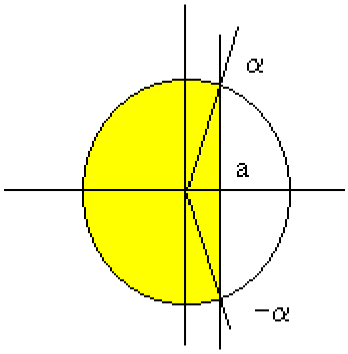
Disequazione $\cos x > a$

$a \ge 1$:	impossibile
$a < -1$:	sempre vera
$a = -1$:	vera $\forall x \neq \pi + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$-\alpha + 2k\pi < x < \alpha + 2k\pi$, con $\alpha = \arccos a$, $k \in \mathbf{Z}$



Disequazione $\cos x < a$

$a \ge 1$:	sempre vera
$a < -1$:	impossibile
$a = -1$:	vera $\forall x \neq \pi + 2k\pi$
$-1 < a < 1$:	$\alpha + 2k\pi < x < 2\pi - \alpha + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$



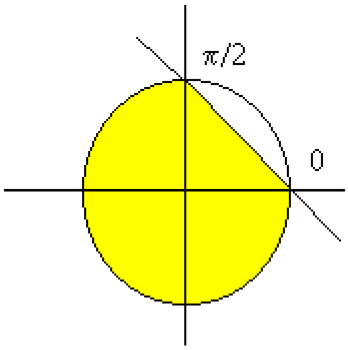
DISEQUAZIONI LINEARI

Nel caso di una disequazione lineare del tipo asenx + bcosx > (<) h si procede come per l'equazione corrispondente, cioè si risolve intersecando la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con la disequazione ay + bx >h (che rappresenta un semipiano)

Esempio

- senx + cos x <1

Si pone *y = senx, x= cosx* e si interseca il sempipiano *y < -x + 1* così ottenuto con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$



Si ottiene così la soluzione: $\pi/2 + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$

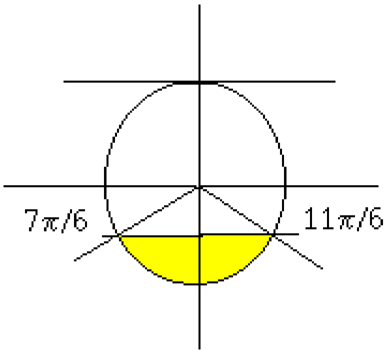
DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Si risolvono come le disequazioni di secondo grado, scegliendo gli intervalli interni o esterni alle soluzioni trovate, si ottengono così delle disequazioni di primo grado che si risolvono come precedentemente visto.

Esempio

- $2sen^2x - sen\ x - 1 > 0$

risolvendo l'equazione $2sen^2x - sen\ x - 1 = 0$ ottengo, mediante la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado: sen x = 1 sen x = -1/2, da cui, prendendo i valori esterni si ha:
sen x > 1 sen x < -1/2
cioè:



sen x >1 non dà soluzioni, mentre sen x < ½ ha come soluzioni $7\pi/6 + 2k\pi < x < 11\pi/6 + 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$

Esistono identità goniometriche, alcune importanti, altre meno. A titolo di esempio riportiamo le formule di addizione. Altre si trovano in Appendice.

FORMULE DI ADDIZIONE

$\mathrm{sen}(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$$

TEST DI AUTOVALUTAZIONE

1. Risolvere le seguenti disequazioni:

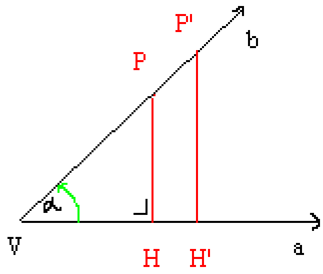
   a. $\cos x > \frac{1}{2}$
   b. $2\cos^2 x - \cos x < 0$
   c. $\mathrm{sen}\, x + \cos 2x < 1$
   d. $\cos x - \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x > 0$
   e. $\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\, x + \cos x > 1$
   f. $\dfrac{2\cos x - 3}{\mathrm{sen} x} \geq 0$

SOLUZIONI

a. $[-\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/3 + 2k\pi]$
b. $[\pi/3 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi,\ 3\pi/2 + 2k\pi < x < 5\pi/3 + 2k\pi]$
c. $[\pi/6 + 2k\pi < x < 5\pi/6 + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$
d. $[-5\pi/6 + 2k\pi < x < \pi/6 + 2k\pi]$
e. $[2k\pi < x < 2\pi/3 + 2k\pi]$
f. $[\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi]$

APPENDICE

- Dimostriamo che dato l'angolo in figura

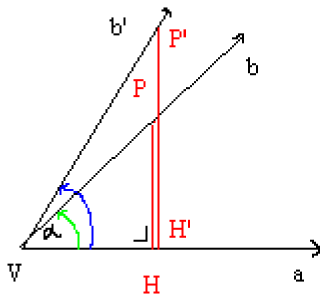


i rapporti *HP / VP* , *VH / VP*, *HP / VH* dipendono unicamente dall'angolo α e non dalla scelta del punto P sulla semiretta *b*.

Consideriamo sulla semiretta *b* un altro punto P' ≠ P ≠ V e proiettiamolo sulla retta *a* nel punto H ≠ H'. I triangoli VHP e VH'P' sono simili perché triangoli con i lati paralleli. Dunque avremo:

H'P' / VP' = HP / VP ; VH'/ VP' = VH / VP ; H'P' / VH' = HP / VP

I rapporti sopra indicati rimangono perciò costanti al variare del punto P sulla semiretta *b*, cioè dipendono solamente dall'angolo α. Infatti, solo se variasse l'angolo i triangoli che si otterrebbero non sarebbero più simili, come evidenziato in figura.



- **FORMULE DI TRIGONOMETRIA**

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
$$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE
(si ottengono dalle precedenti ponendo α = β)

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$

tg 2α = $\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

FORMULE DI BISEZIONE
(si ottengono dalle precedenti dimezzando l'angolo α)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

FORMULE PARAMETRICHE
(espressioni di sin α, cos α in funzione razionale di t = tg $\frac{\alpha}{2}$)

$$\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$tg\,\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$$

FORMULE DI PROSTAFERESI

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

FORMULE DI WERNER

sin α sin β = ½ [cos (α - β) – cos (α + β)]
cos α cos β = ½ [cos (α + β) + cos (α - β)]
sinα cos β = ½ [sin (α + β) + sin (α - β)]

GLOSSARIO

Algebrico
Numero algebrico è un numero soluzione di un'equazione P(x)=0 dove P(x) è un polinomio in x a coefficienti razionali relativi.

Algoritmo
Procedimento di calcolo, finito e non ambiguo, tale da poter essere codificato in linguaggio di programmazione.

Analisi infinitesimale
Branca della matematica che, partendo dal concetto di limite, studia le funzioni e le loro proprietà.

Antisimmetrica
Proprietà antisimmetrica: se a è in relazione con b e b è in relazione con a allora a e b sono uguali, oppure la sua contronominale: se a e b sono diversi ed a è in relazione con b, allora b non è in relazione con a.

Aperto
Intervallo aperto: sottoinsieme di R del tipo $a<x<b$, cioè che non include nessuno degli estremi dell'intervallo stesso. In generale, un insieme è aperto quando per ogni suo punto esiste un intorno tutto contenuto nell'insieme stesso.

Appartiene

Il simbolo $\in$ si legge appartiene ed è usato per indicare che un oggetto è elemento di un insieme.

Per negare questo predicato si utilizza la seguente scrittura: $x \notin X$ che si legge "*x* non appartiene ad X".

Area
Misura della porzione di superficie delimitata da un particolare contorno.

Asintoto
Una retta costituisce un asintoto per una curva se è possibile determinare dei punti della curva per i quali la distanza dalla retta si può rendere minore di un qualunque numero positivo, arbitrariamente piccolo.

Assioma
Proposizione che si assume come vera senza dimostrazione; ad esempio "per due punti distinti passa una e una sola retta". Oggi il termine assioma è utilizzato come sinonimo di postulato. In Euclide invece il termine postulato è specifico della geometria, mentre con assioma si indica una proprietà non dimostrata che riguarda tutte le discipline: per esempio "il tutto è maggiore della parte".

Associativa
Dato un insieme S in cui è definita un' operazione *, si dice che vale la proprietà associativa dell'operazione * nell'insieme S se, per ogni terna di elementi *a,b,c* di S si ha: $(a*b)*c=a*(b*c)$.

Assoluto

Dato il numero reale x si dice valore assoluto di x, e si indica col simbolo |x|, il numero stesso se questo è positivo o nullo, il suo opposto se esso è negativo. Le proprietà fondamentali del valore assoluto sono le seguenti:

$|x| \geq 0 \ \forall x \in R \quad |x| = 0$ se e solo se $x = 0$

$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \qquad \forall a,b \in R$

$||a| - |b|| \leq |a - b| \qquad \forall a,b \in R$

$x_1 > x_2 \Rightarrow |x_1| > |x_2|$ se $x_1, x_2 > 0$

$x_1 > x_2 \Rightarrow |x_1| < |x_2|$ se $x_1, x_2 < 0$

Assurdo

Dimostrazione per assurdo: tecnica per dimostrare che consiste nel negare la tesi e nel far vedere che ne consegue una contraddizione o con l'ipotesi o con un postulato o con un teorema precedentemente dimostrato.

Baricentro

E' il centro di massa.

Binomiale

Coefficiente binomiale è il simbolo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{n!}$ che compare nello sviluppo della potenza di un binomio. Il simbolo $\binom{n}{k}$ indica le combinazioni di n elementi a classi di k.

Binomio

Polinomio costituito da due monomi.

Teorema del binomio: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Convesso

Un dominio T si dice convesso se, dati due punti qualsiasi A e B in T, tutto il segmento AB è contenuto in T.

Coordinate polari

Le $\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta \end{cases}$ definiscono una trasformazione biunivoca tra la striscia A del piano (r, ϑ) definita dalle limitazioni $r>0$, $0<\vartheta<2\pi$ e il campo B dato dal piano xy.

Chiuso

Un insieme è chiuso rispetto ad una operazione * se, comunque si prendano due elementi a e b di tale insieme, il risultato dell'operazione a*b è ancora un elemento di tale insieme.

Insieme chiuso: se il suo complementare è un aperto, cioè se tutti i suoi punti di accumulazione gli appartengono.

Codominio

Data una funzione y=f(x), definita in un insieme I e a valori in un insieme A si chiama codominio il sottoinsieme di A costituito dagli elementi di A che hanno almeno una controimmagine in I.

Coefficiente
Parte numerica che è moltiplicata per una parte letterale.

Coimplicazione
Operazione logica. Date due proposizione p e q , $p \Leftrightarrow q$ è vera quando p e q sono entrambe vere o entrambe false. Come operazione logica è equivalente all'enunciato se e solo se .

Combinazioni
Combinazioni semplici: dati n elementi, si dicono combinazioni semplici di classe k (con $k \in N$, $k \leq n$) tutti i sottoinsiemi di k elementi che si possono formare con gli elementi dati, senza ripetizioni e senza considerare l'ordine con il quale gli elementi compaiono nei sottoinsiemi.

Il numero delle combinazioni semplici si indica con $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Combinazioni con ripetizione: dati n elementi, si dicono combinazioni con ripetizione di classe k (con $k \in N$) tutti i sottoinsiemi di k elementi che si possono formare con gli elementi dati, senza considerare l'ordine con il quale gli elementi compaiono nei sottoinsiemi.

Il numero delle combinazioni con ripetizione è dato da $\binom{n+k-1}{k}$.

Commensurabili
Si dicono commensurabili due grandezze omogenee che ammettono qualche sottomultiplo comune.
Il rapporto fra due grandezze commensurabili è un numero razionale.

Commutativa
Definita un'operazione * in un insieme I si dice che l'operazione gode della proprietà commutativa se $a*b = b*a$ per ogni a,b appartenenti ad esse.

Complementare
Insieme complementare: dato un insieme I e un suo sottoinsieme A si definisce insieme complementare di A rispetto ad I l'insieme I – A.

Concava
Figura concava: figura in cui esistono due punti interni che possono essere congiunti con un segmento non completamente contenuto nella figura stessa.

Confronto
In senso generico si possono confrontare due numeri reali o due figure: confrontare due numeri reali vuol dire stabilire se sono uguali o quali di essi è il maggiore, confrontare due figure vuol dire stabilire se sono congruenti o quale delle due ha estensione maggiore.

Conica
Curva ottenuta intersecando un cono indefinito a due falde con un piano non passante per il suo vertice.
L'equazione di una conica è un'equazione di secondo grado: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ con a,b,c non contemporaneamente nulli. Si dice degenere se la sua equazione può essere scomposta in fattori di primo grado.
In una conica non degenere detto $\Delta = b^2 - 4ac$ se è:
$\Delta < 0$ si tratta di una ellisse o di una circonferenza come caso particolare

$\Delta = 0$ si tratta di una parabola
$\Delta > 0$ si tratta di un'iperbole

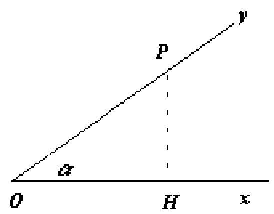
Connettivo
In logica si chiamano connettivi proposizionali i termini: non (negazione), e (congiunzione), o (nel senso di vel), o (nel senso di aut), implica, coimplica (o equivale). Tali termini servono a collegare ("connettere") proposizioni elementari.

Contronominale
Data la proposizione composta $p \rightarrow q$ si chiama sua contronominale la proposizione $\neg q \rightarrow \neg p$ (il simbolo $\neg$ indica la negazione non). Se la proposizione è vera è vera anche la sua contronominale.

Convessa
Figura convessa: figura in cui, presi comunque due punti interni, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nella figura stessa.

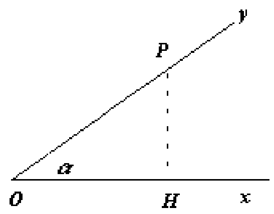
Corollario
Si definisce corollario di un teorema una sua conseguenza immediata.

Cosecante
Dato un angolo orientato xOy, descritto dal raggio vettore Oy rispetto alla semiretta origine Ox, si definisce cosecante il rapporto costante tra la distanza di un punto qualunque P di Oy da O e la distanza di P dalla retta Ox.

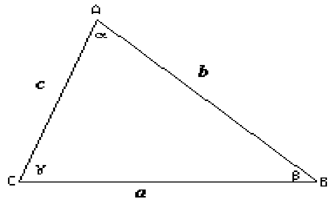


Quindi è: $\csc\alpha = OP/PH$ ed è $\csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$.

Coseno
Dato un angolo orientato xOy, descritto dal raggio vettore Oy rispetto alla semiretta origine Ox, si definisce coseno il rapporto costante tra la distanza di H proiezione su Ox di un punto qualunque P di Oy e la distanza di P da O.

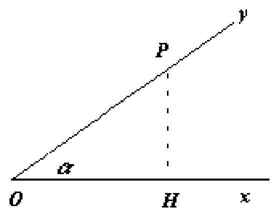


Quindi è: $\cos\alpha = OH/OP$.
Teorema del coseno: in un triangolo qualsiasi è:



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Cotangente
Dato un angolo orientato xOy, descritto dal raggio vettore Oy rispetto alla semiretta origine Ox, si definisce cotangente il rapporto costante tra la distanza della proiezione H di un punto qualunque P di Oy da O e la distanza di P da H.



Si indica con cotgα ed è
$\text{cotg}\,\alpha = OH/PH$
$\text{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\alpha}$.

Decimale
Numero decimale: numero non intero, costituito da una parte intera che precede la virgola, dalla virgola e da una parte che segue la virgola detta mantissa.

Definizione
Frase a volte esprimibile anche con formule matematiche, che descrive in modo univoco, non ambiguo, un oggetto matematico, partendo da grandezze o enti già noti.
Una definizione è ben formata se :
- l’insieme formato dai nuovi enti definiti non deve essere vuoto

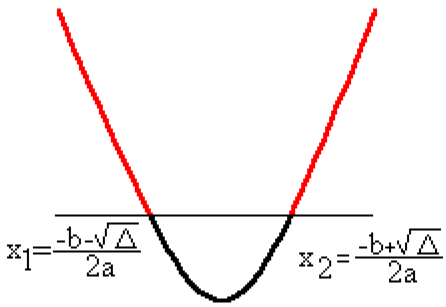
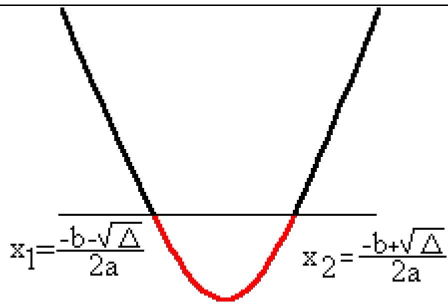
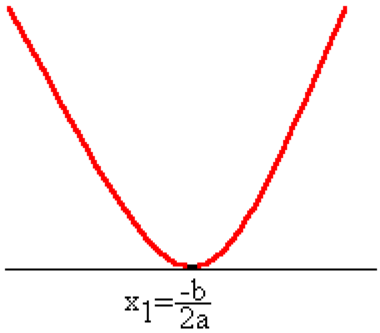
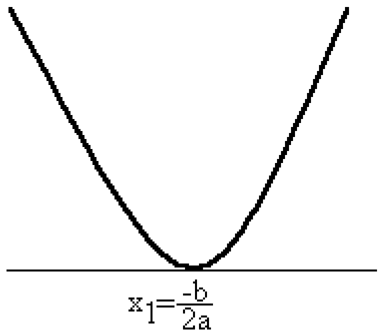
- nell'insieme universo ci deve essere qualche elemento che non gode della proprietà oggetto della definizione.

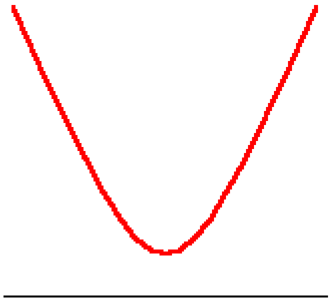
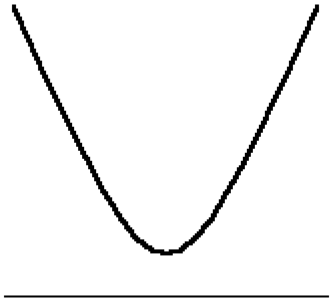
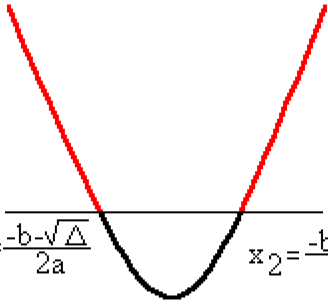
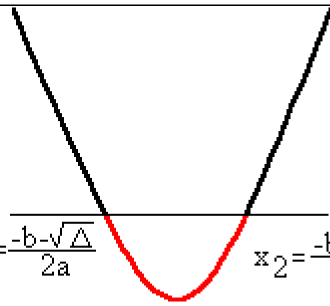
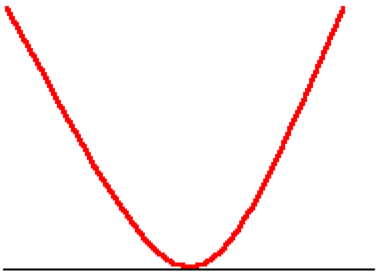
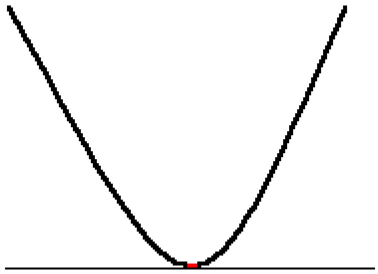
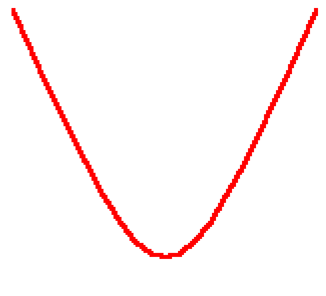
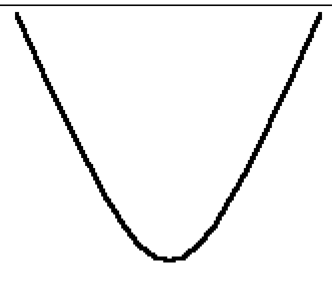
Degenere
Caso che verifica solo formalmente una definizione generale, ma rappresenta un caso estremo.

Denso
Un insieme ordinato I si dice denso se per ogni coppia a, b di elementi di I, con $a<b$, tra a e b vi è sempre almeno un elemento di I.
Un sottoinsieme X di I si dice denso in I se per ogni coppia a, b di elementi di I, con $a<b$, tra a e b vi è sempre almeno un elemento di X.

Discreto
Un insieme A si dice discreto se per ogni suo elemento esiste almeno un intorno (definito in un altro insieme) in cui non cadono elementi di A.
Gli insiemi N e Z dei numeri naturali e dei numeri interi relativi sono insiemi discreti.

Disequazione di secondo grado

	$ax^2+bx+c>0$ con $a>0$	$ax^2+bx+c<0$ con $a>0$
$\Delta > 0$	 $x<x_1 \lor x>x_2$	 $x_1<x<x_2$
$\Delta = 0$	 $x \neq x_1$	 $\nexists x \in R$

$\Delta < 0$	 $\forall\, x \in R$	 $\nexists x \in R$
	$ax^2+bx+c \geq 0$ con $a>0$	$ax^2+bx+c \leq 0$ con $a>0$
$\Delta > 0$	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$  $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x \leq x_1$ v $x \geq x_2$	$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$  $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$	 $x_1=\frac{-b}{2a}$ $\forall\, x \in R$	 $x_1=\frac{-b}{2a}$ $x=-\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	 $\forall\, x \in R$	 $\nexists x \in R$

Disgiunti
Due insiemi si dicono disgiunti se hanno intersezione vuota.

Disgiunzione
Operazione logica ottenuta dall'uso del connettivo VEL (o inclusivo).

Dispari
Numero dispari: un numero intero positivo si dice dispari se diviso per due ha resto diverso da zero.
Funzione dispari: una funzione y=f(x) di dominio A si dice dispari se, per ogni x di A, anche –x appartiene ad A e si ha f(-x)=-f(x).
Le funzioni dispari hanno grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi.

Disposizione
Disposizioni semplici di n elementi di classe k, con k non maggiore di n, tutti i possibili raggruppamenti che si ottengono prendendo k elementi diversi fra gli n assegnati, considerando distinti due gruppi se differiscono o per la composizione del raggruppamento o per l'ordine degli elementi che lo compongono.
Il numero delle disposizioni di n elementi di classe k si indica con $D_{n,k}$.
Si ha $D_{n,k}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$(prodotto di k fattori decrescenti a partire da n).
Disposizioni con ripetizione: si chiamano disposizioni con ripetizione con n elementi di classe k (con k minore, uguale o maggiore di n) tutti i possibili raggruppamenti che si ottengono prendendo k elementi, distinti o no, fra gli n assegnati, considerando diversi due gruppi che differiscono o per la composizione del raggruppamento o per l'ordine degli elementi. Il numero delle disposizioni con ripetizione di n elementi di classe k si indica col simbolo $D^*_{n,k.}$
Si ha $D^*_{n,k}=n^k$.

Distributiva
Proprietà distributiva: date due operazioni: * e o definite sugli elementi di un insieme I, si dice che vale la proprietà distributiva di * rispetto a o se per ogni terna di elementi a, b, c apparteneti ad I si ha: a * (b o c) = (a * b) o (a * c)

Dominio
Un insieme I di punti che sia chiuso e tale per cui per ogni punto di I in ogni suo intorno cadono infiniti punti interni ad I.
Dominio di una funzione è il suo campo di esistenza.

e
Si indica con e il numero trascendente e=2,7182818459…

Eccentricità
In una conica si chiama eccentricità il rapporto costante tra la distanza di un punto della conica da un fuoco e la distanza della direttrice relativa a quel fuoco. Le coniche quindi possono essere definite come luogo dei punti del piano per i quali tale eccentricità è appunto costante.
Se l'eccentricità è minore di uno si ha una ellisse o come caso particolare una circonferenza.
Se l'eccentricità è uguale ad uno si ha la parabola.
Se l'eccentricità è maggiore di uno si ottiene l'iperbole.

Elemento
Termine primitivo utilizzato per definire un membro di un insieme.

Ellisse

Luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi. A tale costante si da il valore 2a.

La sua equazione è:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Dove a e b sono detti semiassi, c semidistanza focale, e vale che $c^2 = a^2 - b^2$ nel caso in cui a>b oppure $c^2 = b^2 - a^2$ nel caso in cui b>a.

L'area delimitata dall'ellisse è data da S = πab.

Equazione

Uguaglianza tra due espressioni una almeno delle quali contenente una o più incognite, soddisfatta per particolari valori assegnati alle incognite, dette soluzioni dell'equazione.

Nel caso di equazioni algebriche a coefficienti interi si ha che:

un'equazione di secondo grado ha equazione ridotta a forma normale $ax^2 + bx + c = 0$ e la sua formula risolutiva è:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Se però b è pari si ha la seguente formula detta formula ridotta:

$$x=\frac{-b/2\pm\sqrt{(b/2)^2-ac}}{a}$$

Per le equazioni di terzo e quarto grado esistono formule risolutive molto laboriose, mentre è stato dimostrato che non esistono formule risolutive per le equazioni di grado superiore al quarto.

Teorema fondamentale dell'algebra: un'equazione algebrica di grado n in C ha nel campo dei numeri complessi n radici, se ognuna è contata esattamente tante volte quanto indica la sua molteplicità.

Ogni equazione che ammette una soluzione complessa ammette anche la sua coniugata.

Quindi un'equazione di grado dispari ammette almeno una soluzione reale, mentre un'equazione di grado pari può non avere soluzioni reali.

Equazione di secondo grado

Si dice **equazione di secondo grado** nell'incognita x ogni equazione del tipo:

$a\,x^2 + b\,x + c = 0.$

La soluzione si ottiene con i seguenti passaggi:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Discussione di una equazione di secondo grado:

$a \neq 0$ e $b^2 - 4ac > 0$
se e solo se l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte

$a \neq 0$ e $b^2 - 4ac = 0$
se e solo se l'equazione ammette due soluzioni reali coincidenti

$a \neq 0$ e $b^2 - 4ac < 0$
se e solo se l'equazione ammette due soluzioni complesse e coniugate, pertanto non ammette in questo caso soluzioni reali

Relazioni fra le soluzioni e i coefficienti dell'equazione $a x^2 + b x + c = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

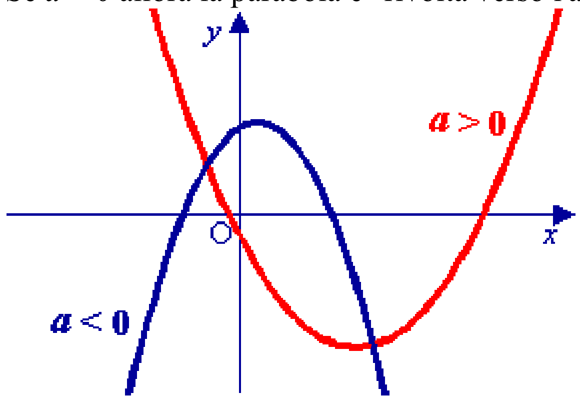
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Interpretazione grafica della risoluzione di un'equazione di secondo grado

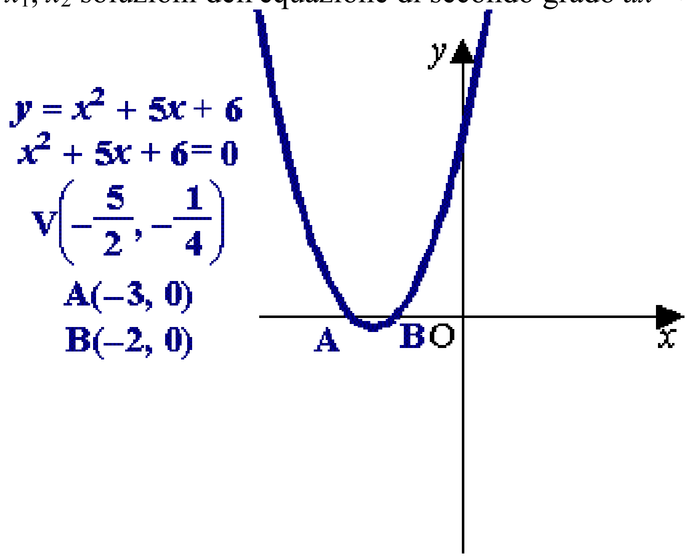
$y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$
ha come rappresentazione grafica la parabola con asse parallelo all'asse y, e vertice V di coordinate:

$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$$

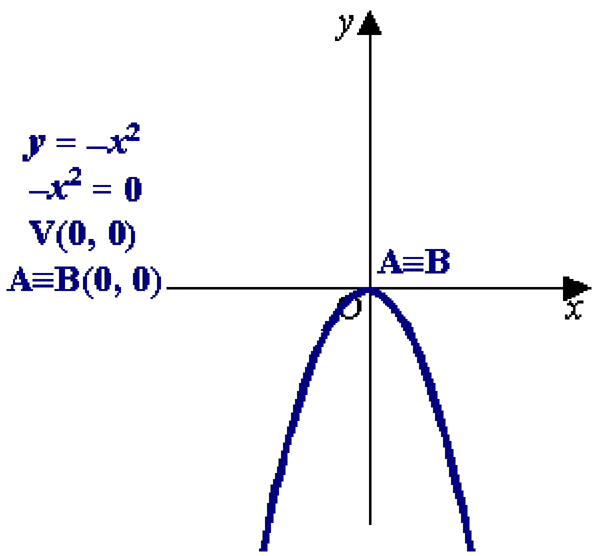
Se $a < 0$ allora la parabola è "rivolta verso il basso"
Se $a > 0$ allora la parabola è "rivolta verso l'alto"



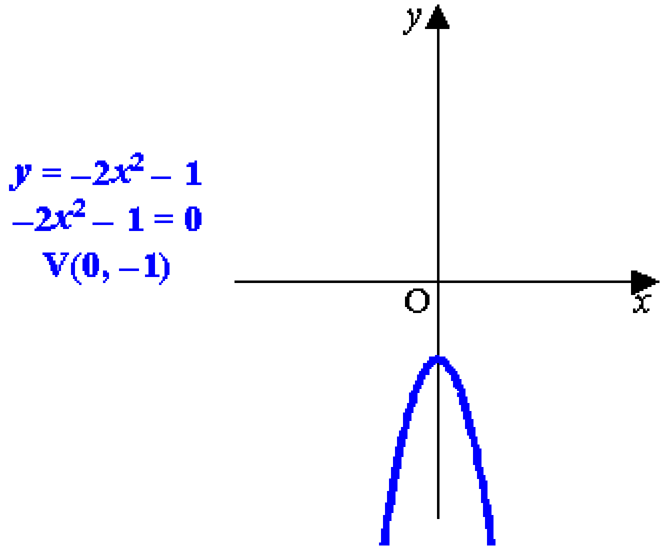
Se $b^2 - 4ac > 0$ la parabola $y = ax^2 + bx + c$ interseca l'asse delle ascisse nei punti A(x_1, 0), B(x_2, 0) con x_1, x_2 soluzioni dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$



Se $b^2 - 4ac = 0$ la parabola $y = ax^2 + bx + c$ è tangente all'asse delle ascisse nel punto A(x_1, 0) con x_1 soluzione con molteplicità due dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$



Se $b^2 - 4ac < 0$ la parabola $y = ax^2 + bx + c$ non interseca l'asse delle ascisse



Equivalenti
Due equazioni o disequazioni si dicono equivalenti se ammettono le stesse soluzioni.
Due elementi di un insieme si dicono equivalenti se appartengono alla stessa classe di equivalenza.

Equivalenza
Una relazione binaria definita in un insieme I si dice di equivalenza se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esponenziale
Funzione esponenziale: funzione trascendente di equazione $y = a^x$ con $a \neq 1$ ed $a>0$. Il suo campo di esistenza è tutto R, mentre l'insieme immagine è R^+.
Per $a>1$ la funzione è strettamente crescente, mentre per $0<a<1$ è strettamente decrescente.
Nel caso particolare di a = e (si indica con e il numero trascendente e=2,7182818459….) si ha la funzione esponenziale $y = e^x$.
Notazione esponenziale: notazione scientifica, in cui un numero viene rappresentato nella forma $N = a * 10^k$ con $k \in Z$ e $0 < a < 1$. A è detto mantissa mentre k caratteristica.

Espressione
Insieme di numeri e lettere legati tra loro da segni di operazioni.

Esterno
Un punto si dice esterno rispetto ad un insieme I se esiste almeno un suo intorno che non contiene elementi di I.

Fascio

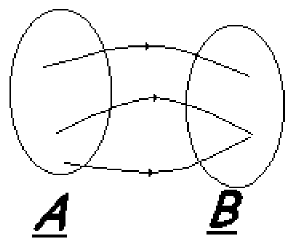
In geometria euclidea si dice fascio di rette con centro proprio C l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per uno stesso punto C, detto centro del fascio. Si dice fascio di rette improprio l'insieme di tutte le infinite rette che hanno la stessa direzione, ovvero l'insieme di tutte le rette parallele ad una retta data (si ricordi quindi che hanno in comune un punto improprio).
In geometria analitica si ottiene un fascio date due rette r ed s rispettivamente di equazione $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c=0$, dalla combinazione lineare:
(*) $h(ax+by+c)+l(a'x+b'y+c')=0$
con h ed l non contemporaneamente nulli.. Alle rette r ed s si dà il nome di generatrici del fascio.
Ponendo $l\neq0$ e utilizzando il parametro $k=h/l$ l'equazione del fascio di rette diventa: $k(ax+by+c)+a'x+b'y+c'=0$ che contiene tutte le rette del fascio tranne la $ax+by+c=0$ che non si ottiene per nessun valore di K.
Fascio di circonferenze: l'insieme di tutte le circonferenze che hanno un medesimo centro o che hanno un dato asse radicale. Si chiamano punti base di un fascio di circonferenze i punti comuni a tutte le circonferenze del fascio. Un fascio di circonferenze può avere due punti base (distinti o coincidenti) o nessun punto base.
Si chiama equazione di un fascio di circonferenze non concentriche l'equazione:
(1) $h(x^2+y^2+ax+by+c)+l(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$ oppure $x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

Fattoriale
Si definisce fattoriale di n e si scrive n! il prodotto $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ldots\ldots\ldots2\cdot1$ di tutti gli n numeri decrescenti a partire da n.

Finito
Che ha termine. Un insieme si dice finito se e solo se non è equipotente a nessun sottoinsieme proprio di sé stesso.

Focale
Asse focale: asse di simmetria di una conica che contiene i fuochi della conica stessa.
Distanza focale: in una conica distanza fra un fuoco e il centro della conica, di solito indicata con la lettera *c*.

Funzione:
Fissati due insiemi non vuoti e non necessariamente distinti, *A* e *B*, si dice che è data una funzione,*f*, da *A* in *B* se è assegnata una "regola" che ad ogni elemento dell'insieme *A* fa corrispondere uno ed un solo elemento appartenente all'insieme *B*.



L'insieme *A* si dice dominio della funzione, l'insieme *B* si dice insieme immagine.
Se x è un qualsiasi elemento dell'insieme *A* con *f(x)* si indica l'elemento che per la *f* corrisponde a x; *f(x)* si chiama immagine di x in *B*; se y è un elemento di *B* , l'elemento x tale che y=*f(x)* si dice controimmagine di y in *A*.

Fuoco

Si chiama fuoco di una conica un punto F del suo piano tale che per ogni punto P della conica sia costante il rapporto fra la distanza di P da F e da una retta fissa detta direttrice associata ad F.
L'ellisse e l'iperbole hanno due fuochi. La circonferenza ha due fuochi coincidenti con il centro della circonferenza(la direttrice è una retta non reale); la parabola ha un solo fuoco.

Goniometria
Parte della matematica che si occupa della misurazione degli angoli, costituita in particolare dalla definizione delle funzioni angolari (seno, coseno, tangente, cotangente, secante, cosecante) dalla ricerca della loro proprietà e delle relazioni che intercorrono tra di esse.
Relazioni fondamentali della goniometria sono:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$tgx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$
$$\cot gx = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cos ecx = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Goniometrica (circonferenza)
circonferenza avente centro nell'origine e raggio l'unità. La sua equazione è: $x^2 + y^2 = 1$.

Grado
Si dice grado di un monomio la somma degli esponenti delle lettere che lo compongono.
Si dice grado di un polinomio il massimo dei gradi dei monomi che lo costituiscono.
Data un equazione P(x) = 0 dove P(x) è un polinomio in x, si chiama grado dell'equazione il grado del polinomio P. Non si dà, invece, una definizione di grado per le equazioni non algebriche.
Si chiama grado di un sistema composto da equazioni algebriche il prodotto dei gradi delle equazioni che compongono il sistema.

Grafico
Grafico di una funzione: Data una funzione y=f(x) si chiama grafico il luogo dei punti P (x,f(x)), con x appartenente al campo di esistenza, in un piano cartesiano ortogonale.

Immaginario
Un numero immaginario si ottiene moltiplicando un numero reale per i, dove si intende con i la radice quadrata di meno uno.

Immagine
Data una funzione $y=f(x)$ di dominio A e codominio B si chiama immagine di $x \in A$ l'elemento di $f(x) \in B$ unico per definizione che la legge associa ad x.
Si chiama insieme immagine il sottoinsieme di B costituito dalla totalità delle immagini di tutti gli elementi di A.

Implicazione
Connettivo che nella logica delle proposizioni indicato con l'enunciato del tipo "se A, allora B" o in simboli con $A \rightarrow B$. L'implicazione, per definizione, è falsa solo nel caso in cui è vera A ed è falsa B.

Incommensurabili
Due grandezze omogenee che non ammettono alcun sottomultiplo in comune.
Il rapporto di due grandezze incommensurabile è un numero irrazionale.

Indeterminato

Un sistema, o un problema, si dice indeterminato se ammette infinite soluzioni.

Insieme
Collezione, aggregato di elementi soggetti alla sola condizione che sia sempre possibile stabilire senza ambiguità se un elemento qualsiasi appartiene o no a tale aggregato.

Insieme di esistenza
Sinonimo di campo di esistenza.

Insieme di variabilità
Sinonimo di codominio.

Intersezione
Dati due insiemi A e B, si chiama loro intersezione, e si indica con il simbolo $A \cap B$, l'insieme i cui elementi appartengono sia all'insieme A, sia all'insieme B. Due insiemi la cui intersezione corrisponde all'insieme vuoto sono detti disgiunti.

Intervallo
Sottoinsieme non vuoto dell'insieme dei numeri reali. Un intervallo può essere chiuso, se contiene i suoi estremi ad esempio $a \leq x \leq b$, o aperto, se non contiene i suoi estremi, ad esempio $a<x<b$.
Un intervallo di dice limitato se esistono due numeri, h e k, tali che ogni elemento dell'intervallo è minore di h e maggiore di k.

Intervalli

Si adottano le seguenti notazioni:

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a,b)=\{x\in \mathbb{R} : a\leq x<b\}$$

$$(a,b]=\{x\in \mathbb{R} : a<x\leq b\}$$

$$[a,b]=\{x\in \mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$$

$$(-\infty,b)=\{x\in \mathbb{R} : x<b\}$$

$$(-\infty,b]=\{x\in \mathbb{R} : x\leq b\}$$

$$(a,+\infty)=\{x\in \mathbb{R} : x>a\}$$

$$[a,+\infty)=\{x\in \mathbb{R} : x\geq a\}$$

Intorno

Nell'insieme dei numeri reali, si chiama intorno di $a\in R$ un intervallo limitato aperto con centro in a $(a-\gamma,a+\gamma)$.

Si chiama "intorno di più infinito" un intervallo $(m, +\infty)$; si chiama "intorno di meno infinito" un intervallo $(-\infty, m)$; si chiama intorno destro di a un intervallo che ammette a come estremo sinistro $[a,a+\gamma)$.; si chiama intorno sinistro di a un intervallo che ammette a come estremo destro$(a-\gamma,a]$.

Inverso

Inverso di un elemento a in un insieme I rispetto all'operazione * è quell'elemento a' tale che a*a?=a'*a=u dove u è l'elemento neutro.
Inverso di a, con a diverso da zero, rispetto alla moltiplicazione è 1/a.

Iperbole
L'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza della distanza da due punti fissi detti fuochi.
In un riferimento cartesiano ortogonale in cui i fuochi abbiano coordinate *(-c, 0)* e *(c, 0)*, l'iperbole ha equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (dove sia } b^2 = c^2 - a^2 \text{)}$$

I due punti A e A' dell'iperbole per i quali OA = OA' = a sono detti vertici dell'iperbole.
Il semento AA' è detto asse trasverso dell'iperbole; esso ha lunghezza 2a. Il segmento di estremi (0,-b) e (0,b) è detto asse non traverso e ha lunghezza 2b. Le due rette bx + ay = = e bx – ay = 0 sono detti asintoti dell'iperbole.

Irrazionale
Numero irrazionale: numero decimale illimitato che non può essere trasformato in frazione. Sono, ad esempio, irrazionali i numeri $\sqrt{2}$, *e.*
Nelle operazioni di misura il numero irrazionale proviene dal rapporto di due grandezze incommensurabili.
Funzione irrazionale: una funzione si dice irrazionale se nella sua espressione analitica la variabile compare, almeno una volta, sotto il segno di radice.

Maggiorante
Dato un insieme numerico A, si chiama maggiorante di A un numero b tale che b ≥ a, per ogni a appartenente ad A.

Mantissa
Dato un numero reale x, si chiama sua mantissa il numero x-[x], dove [x] detto parte intera di x, è il massimo intero minore o uguale a x. La mantissa di un numero è sempre positiva e compresa tra zero ed uno.
La funzione y =mant(x) è quindi data da: y =mant(x) = x-[x]

Massimo
Dato un insieme I totalmente ordinato si chiama massimo di I, se esiste, l'elemento M di I tale che M≥ x, per ogni x appartenente a I.
Un sottoinsieme di Z limitato superiormente (o inferiormente) è dotato di massimo (o di minimo).
In Q ed in R un sottoinsieme limitato può non avere massimo .

Matrice
Si definisce matrice un insieme di n × m elementi ordinati secondo due indici, cioè per righe e per colonne. Si dice matrice quadrata la matrice n × n e il numero n si definisce ordine della matrice. Ad ogni matrice quadrata si può associare un numero detto determinante della matrice.

Minimo
Dato un insieme I totalmente ordinato si chiama minimo di I, se esiste, l'elemento M di I tale che M≤ x, per ogni x appartenente a I.
Un sottoinsieme di Z limitato superiormente (o inferiormente) è dotato di massimo (o di minimo).

In Q ed in R un sottoinsieme limitato può non avere minimo .

Minorante

Dato un insieme numerico A, si chiama minorante di A un numero b tale che b ≤ a, per ogni a appartenente ad A.

Modulo

Si definisce modulo di un numero complesso z = a + ib il numero reale positivo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il modulo di un numero complesso geometricamente esprime la sua distanza dall'origine.
Nel campo reale si usa modulo come sinonimo di valore assoluto.
Dato il numero reale x si dice valore assoluto di x, e si indica col simbolo |x|, il numero stesso se questo è positivo o nullo, il suo opposto se esso è negativo. Le proprietà fondamentali del valore assoluto sono le seguenti:

$|x| \geq 0 \ \forall x \in R \quad |x| = 0$ se e solo se $x = 0$

$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \qquad \forall a,b \in R$

$||a| - |b|| \leq |a - b| \qquad \forall a,b \in R$

$x_1 > x_2 \Rightarrow |x_1| > |x_2|$ se $x_1,x_2 > 0$

$x_1 > x_2 \Rightarrow |x_1| < |x_2|$ se $x_1,x_2 < 0$

Molteplicità

w si dice radice con molteplicità m del polinomio P(x) se esiste un polinomio Q(x) tale che:

- w non è radice di Q(x)
- $P(x) = (x - w)^m \cdot Q(x)$

Negazione

La negazione è un connettivo logico. La negazione di una proposizione P, che in genere si indica con ¬P, è vera quando P è falsa ed è falsa quando P è vera.

Neutro

In un insieme I in cui è definita un'operazione * si chiama elemento neutro, se esiste, l'elemento u tale che: u*a=a*u=a per ogni elemento a appartenente ad I.

$$\forall a \in A$$

$$U * a = a * U$$

Normale

Retta o segmento normale: retta o segmento perpendicolare.
Normale ad una curva: retta perpendicolare ad una tangente nel punto di tangenza alla curva.
Forma normale : forma canonica.

Notevole

Prodotto notevole: nel calcolo letterale si chiamano "prodotti notevoli" quei prodotti fra polinomi che, per la frequenza con cui s'incontrano nella pratica, si eseguono ricordando a memoria il risultato.
Si considerano prodotti notevoli i seguenti:

quadrato del binomio : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

prodotto di una somma per una differenza di quantità uguali: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

cubo del binomio: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

quadrato del trinomio: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

prodotto uguale a somma (o differenza) di cubi : $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$.

Numerabile

Un insieme si dice numerabile se si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme N dei numeri naturali o con un suo sottoinsieme infinito.

Numero

Numero naturale: dati due insiemi finiti, A e B, si dice che essi sono equipotenti, se sono entrambi vuoti oppure se esiste una corrispondenza biunivoca tra A e B. Nell'insieme T di tutti gli insiemi con un numero finito di elementi si considera, quindi, la relazione R secondo cui due insiemi di T sono in relazione se e solo se sono equipotenti.

La relazione R è una relazione di equivalenza; essa gode, infatti, delle proprietà riflessiva, transitiva e simmetrica. Si definisce numero naturale ogni classe di equivalenza individuata dalla relazione R. L'insieme dei numeri naturali, cui appartiene anche lo zero, si indica con la lettera N.

Numero intero relativo: indicato con N l'insieme dei numeri naturali, sia N x N il prodotto cartesiano di N per N.

Date due coppie (a,b) (c,d) in N x N, si dice che esse sono in relazione se e solo se a+d = c+b.

La relazione R cosi definita è una relazione di equivalenza che, quindi, determina una partizione degli elementi di N in classi di equivalenza (insieme quoziente). Chiamiamo un numero intero relativo ognuna delle classi di equivalenza individuate dalla relazione R.

L'insieme dei numeri interi relativi si indica con la lettera Z.

Definizione di numero razionale: nell'insieme Z x Z_0 due coppie ordinate (a,b) (c,d) si dicono in relazione se e solo se ad =bc. La relazione che in questo modo si definisce è una relazione di equivalenza e determina un insieme quoziente: si chiama numero razionale ognuno degli elementi di tale insieme quoziente.

L'insieme dei numeri razionali si indica con la lettera Q.

In Q non vale la proprietà dell'estremo superiore: può accadere, cioè, che vi siano sottoinsiemi limitati di Q che non ammettono estremo superiore.

Definizione di numero reale: si chiama numero reale una partizione dell'insieme Q in due classi (A.B) in cui ogni elemento della prima è minore di ogni elemento della seconda, e che siano indefinitamente ravvicinate, cioè preso un numero $\varepsilon>0$ arbitrariamente piccolo, è sempre possibile trovare un elemento $a\in A$ e un elemento $b\in B$ tali che $|b-a|<\varepsilon$.

L'insieme di tutte le partizioni di Q come sopra definite costituisce l'insieme dei numeri reali R.

Nell'insieme R vale la proprietà dell'estremo superiore: ogni sottoinsieme limitato ha estremo superiore.

Definizione di numero complesso: si definisce numero complesso una coppia ordinata di numeri reali, solitamente si indica con z=a+ib. L'insieme di tutti i numeri complessi si indica con la lettera C. L'insieme C, a differenza di tutti gli altri insiemi numerici prima definiti, non è un insieme ordinato.

O

Congiunzione utilizzata in senso inclusivo (vel) sia nelle definizioni di unione di insiemi, sia nelle definizioni di alternativa, oppure in senso esclusivo col significato di aut; in questo caso dà luogo e in logica al connettivo XOR.

Omografica

Funzione omografica:

funzione di espressione analitica $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ è un'iperbole con asintoti paralleli agli assi il cui centro ha coordinate (-d/c ; a/c) .

Omotetia di centro O e rapporto k:
Trasformazione del piano in cui si fissa un punto O, detto centro, e siano A e A' due punti allineati con esso e tali che OA'/OA = k. Dato un punto P del piano, si chiama suo omotetico il punto P' appartenente alla retta OP per il quale OP:OP'=OA:OA' e che cade rispetto ad O dalla stessa parte di P, secondo che ciò accada o no per A' nei confronti di A.

Le equazioni che danno tale trasformazione sono: $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$

Opposto
Si dice opposto di un numero a reale il numero –a, cioè l'elemento inverso di a rispetto alla somma.

Parabola
Si chiama parabola il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice.
La parabola è una conica, cioè si ottiene anche come sezione piana di un doppio cono di rotazione indefinito con un piano parallelo a una generatrice del cono.
Proprietà notevoli della parabola sono le seguenti:

- le due tangenti condotte a una parabola da un punto della sua direttrice sono l'una perpendicolare all'altra, e il segmento che congiunge i punti di tangenza passa per il fuoco;
- la normale alla parabola condotta per un punto P della parabola biseca l'angolo formato dal raggio focale FP e la parallela per P all'asse di simmetria della curva;
- la parabola è una conica con eccentricità e = 1;
- la sottonormale relativa all'asse in una parabola è costante ed è uguale al parametro.

Una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate ha equazione:
$y = ax^2 + bx + c$
in cui è:

- Vertice: V$\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \right)$;
- Fuoco: F $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1 - b^2 + 4ac}{4a} \right)$;
- asse: $x = -\frac{b}{2a}$;
- direttrice: $y = -\frac{1 + b^2 - 4a}{4a}$.

La parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse ha equazione:
$x = ay^2 + by + c$
mentre le equazioni per il calcolo di V, F, asse e direttrice si ritrovano invertendo le ascisse con le ordinate, e le lettere x con le y e le y con le x in quelle precedenti.

Pari
Un numero naturale si dice pari se è divisibile per due.

Funzione pari: Una funzione y=f(x) di dominio I si dice pari se, per ogni x di I, anche -x appartiene ad I e si ha *f(-x) = f(x)*.
Le funzioni pari hanno grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

Parte

Parte intera: si definisce parte intera di un numero reale a e si indica con $[a]$ il massimo numero intero minore o uguale ad a.
In informatica la parte intera di un numero a si indica con int(a).

Parti
Insieme delle parti: dato un insieme A si chiama insieme delle parti di A, e si indica con il simbolo P(A), l'insieme di tutti i sottoinsiemi, propri ed impropri, di A.
Se A ha *n* elementi, l'insieme delle parti di A è costituito da 2^n elementi.

Partizione
Si dice che è data una partizione di un insieme A se A si ottiene come l'unione di insiemi A_i tali che:
- ogni insieme A_i non è vuoto;
- ogni elemento di A appartiene ad uno dei sottoinsiemi A_i;
- l'intersezione tra due qualsiasi sottoinsiemi A_i è vuota cioè sono disgiunti.

Una relazione di equivalenza R definita in un insieme A, induce una partizione nella quale ogni sottoinsieme A_i contiene elementi equivalenti di A.
L'insieme delle classi di una partizione si chiama insieme quoziente dell'insieme A rispetto alla relazione R e si indica con A / R.

Periodo
Si definisce periodo di una funzione f (quindi periodica) il minore dei numeri T positivi e non nulli per cui $f(x + T) = f(x)$, per ogni x appartenente al dominio di $f(x)$.
Le funzioni seno e coseno, ad esempio, hanno periodo 2π; le funzioni tangente e cotangente hanno periodo π.

Permutazione
Permutazioni semplici: in un insieme finito di n elementi distinti, si chiamano permutazioni tutti i possibili allineamenti che si possono formare con gli n elementi, considerando distinti gruppi con elementi disposti in ordine diverso.
Il numero delle permutazioni in un insieme di n elementi è dato da:
$n! = n(n-1)(n-2) \ldots 1$

Permutazioni con ripetizione: in un insieme finito di n elementi non tutti distinti, tutti i possibili gruppi che si possono formare con gli n elementi assegnati, considerando distinti gruppi con elementi disposti in ordine diverso.
Se $h_1, h_2, \ldots, h_n$, indicano il numero degli elementi fra loro coincidenti, il numero delle permutazioni con ripetizione in un insieme di n elementi è dato da:

$$P_n = \frac{n!}{h_1!h_2!\ldots h_n!}$$

Polare

coordinate polari: in un piano è assegnato un riferimento polare se è data una semiretta orientata x, detta asse polare, avente come origine un punto O, detto polo, e se inoltre è fissata un'unità di misura u.
Considerato positivo il verso antiorario delle rotazioni, ogni punto P del piano è individuato da due coordinate, dette coordinate polari, che sono nell'ordine la distanza, r, di P da O detta modulo e l'angolo orientato α (misurato in radianti), detto anomalia che l'asse polare forma con la semiretta orientata OP. Se l'anomalia appartiene all'intervallo $[0, 2\pi)$, (o all'intervallo $(-\pi,\pi]$) allora vi è corrispondenza biunivoca fra i punti del piano e le coppie ordinate $(r; \alpha)$.

È possibile, in un piano qualsiasi, passare da coordinate cartesiane a coordinate polari, e viceversa, utilizzando le seguenti formule:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\cos\alpha = x / \sqrt{x^2 + y^2}$; $\mathrm{sen}\,\alpha = y / \sqrt{x^2 + y^2}$

$x = r\cos\alpha$

$y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha$

Polinomio

Si chiama polinomio una somma algebrica di monomi, anche eventualmente nulli.
Si definisce grado del polinomio il massimo grado dei suoi termini mentre grado del polinomio rispetto ad una lettera il massimo grado, rispetto a quella lettera, dei suoi termini.

Proprietà fondamentale dei polinomi: due polinomi in una variabile, entrambi di grado n, che assumono gli stessi valori per n+1 valori della variabile sono identici.

Postulato

Proposizione che si ammette vera senza dimostrazione.
In Euclide il termine postulato era riferito solo a proprietà geometriche mentre ora postulato è sinonimo di assioma.
In una teoria matematica i postulati hanno anche il ruolo di definire implicitamente i termini primitivi.

Potenza

Dato un numero reale a e un numero intero positivo n si definisce potenza di base a ed esponente n, e si indica con a^n, il prodotto di n fattori tutti uguali ad a.
Si ha che $a^0 = 1$, se a è diverso da 0. Non ha invece significato l'espressione 0^0.

Inoltre è: $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

Proprietà delle potenze:
- una potenza con esponente dispari conserva il segno della sua base e si annulla quando si annulla la sua base;
- una potenza con esponente pari ha sempre segno positivo, qualunque sia la sua base, e si annulla quando si annulla la sua base.

$a^n a^m = a^{n+m} (n > 0, m > 0)$

- $a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{nm} (n > 0, m > 0)$

$(ab)^n = a^n a^m$

Funzione potenza: $y = x^n$ è una funzione detta funzione potenza. La funzione potenza ha come dominio R e come condominio l'insieme dei numeri reali non negativi, se n è pari, tutto R, se n è dispari.
Potenza con esponente razionale: se a è un numero reale positivo, n un numero naturale ed m un numero intero positivo, si definisce:

$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$

Potenza con esponente irrazionale: se a è un numero reale positivo e α è un numero irrazionale, si definisce a^α l'elemento di separazione di due classi contigue, di potenze con esponente razionale, che hanno come elementi a^q e a^p, con q e p valori approssimati per difetto e per eccesso di α.

Primo

Un numero naturale n si dice primo se ammette come divisori solo 1 e sé stesso.

Prodotto cartesiano
Dati due insiemi A e B, si definisce prodotto cartesiano di A e B, e si indica con A x B, l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate aventi come primo elemento un elemento appartenente ad A e secondo appartenente a B.
Se A e B sono insiemi finiti, rispettivamente di n ed m elementi, il prodotto cartesiano A x B ha n*x*m elementi.

Progressione
Si chiama progressione una successione in cui ogni termine si ottiene dal precedente nel seguente modo:

Progressione aritmetica: una successione numerica in cui la differenza fra ogni termine diverso dal primo e il suo precedente è costante ($x_{n+1} - x_n = d$).
A tale costante d si dà il nome di ragione della progressione.
I termini successivi si possono calcolare o dal precedente sommando d oppure come:
$$a_n = a_r + (n - r)d$$
e in particolare, se r = 1:
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
La somma dei termini di una successione aritmetica è data da:
$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Progressione geometrica: una successione il cui rapporto fra ogni termine diverso dal primo e il precedente è uguale ad un valore costante ($x_{n+1} = x_n \cdot q$).
A tale costante q si dà il nome di ragione della progressione.
I termini successivi possono essere calcolati o dal termine precedente moltiplicato per q oppure come:
$$a_n = a_r q^{n-r}$$
in particolare, se r = 1, si ha
$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
Il prodotto di n termini di una progressione geometrica è dato da:
$$P_n = \sqrt{(a_1 a_n)^n}$$
Mentre la somma di n termini è data da:
$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$
Se la progressione geometrica (serie geometrica) è costituita da infiniti termini e ragione in valore assoluto minore di uno la somma è data da:
$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}$$
mentre la somma non assume valore finito negli altri casi.

Proposizione
Enunciato verbale cui si può attribuire il valore di vero o falso.

Quantificatore
Uno dei due operatori logici: per ogni (∀), esiste almeno un (∃). Il primo è detto quantificatore universale, il secondo quantificatore esistenziale. Quando il quantificatore esistenziale è seguito da ! esso è usato per "esiste uno ed un solo elemento".

R

Simbolo con cui si indica l'insieme dei numeri reali.

rad
Simbolo con cui si indica l'unità di misura radiante.

Radiante
Unità di misura degli angoli. Data una circonferenza di centro O, siano r ed s due semirette orientate uscenti da O e che intersecano la circonferenza in P e Q. Si dice che $\widehat{rs}$ ha l'ampiezza di un radiante quando la lunghezza dell'arco PQ rettificato è uguale alla lunghezza del segmento OP (ossia del raggio).
La misura in radianti di un angolo si ottiene con:

$$\alpha = \frac{PQ}{OP}$$

L'angolo di 1 rad, in gradi sessagesimali, misura 57°17'44",81.
Per passare da gradi a radianti, o viceversa, si applica la proporzione:

$$\alpha_g : 180° = \alpha_r : \pi$$

Radicale
Si chiama radicale il simbolo

$$\sqrt[n]{a}$$

dove n, numero intero positivo, prende il nome di indice del radicale mentre a è detto radicando.

Radice
Radice di un numero: dato un numero reale positivo o nullo a e un numero intero positivo n si definisce radice n-esima aritmetica di a, il numero reale non negativo b tale che $b^n = a$ e si scrive:

$$b = \sqrt[n]{a}$$

Dato un numero reale a e un numero intero positivo n si chiama radice n-esima algebrica di a un numero reale, positivo o negativo, la cui potenza n-esima sia a.
Dalle definizioni precedenti si ha:

- se l'indice n è pari, un numero positivo ha due radici n-esime algebriche, una opposta all'altra, e una radice n-esima aritmetica, corrispondente alla radice algebrica positiva;
- se l'indice n è pari, un numero negativo non ha né radici n-esime algebriche, né radice n-esima aritmetica;
- se l'indice n è dispari, un numero positivo ha una sola radice algebrica ed una radice aritmetica, tra loro coincidenti;
- se l'indice n è dispari, un numero negativo non ha radice aritmetica, e ha una radice algebrica negativa.

Radice di un polinomio: dato un polinomio P(x) si chiama radice di P(x), o zero di P(x), un numero a tale che P(a)=0.
Si chiama molteplicità di una radice la potenza a cui si eleva (x - a) nella scomposizione del polinomio stesso.

Ragione
In una progressione aritmetica: differenza costante d fra un termine diverso dal primo e il suo precedente. In simboli: $d = a_n - a_{n-1}$.
In una progressione geometrica: rapporto costante q tra fra un termine diverso dal primo e il suo precedente. In simboli: $q = a_n / a_{n-1}$.

Razionale

Un numero si dice razionale se è esprimibile come frazione. Sono numeri razionali i numeri interi, i numeri decimali finiti e i numeri decimali periodici.

Reale
Un numero reale è o un numero intero, o un numero decimale finito, o un numero decimale periodico, o un numero decimale illimitato non periodico.
Rappresentazione decimale dei numeri reali:
un numero reale, non razionale ha un allineamento non finito e non periodico di decimali.
Ad es. $\sqrt{2}$ = 1.4142135623…..

Reciproco
Dato un insieme I e un suo elemento a si definisce reciproco o inverso di a rispetto all'operazione * quel numero a^{-1} tale che $a*a^{-1}= a^{-1} *a =u$, dove u è l'elemento neutro dell'insieme 1.
Dato un numero reale a si definisce reciproco o inverso di a rispetto all'operazione operazione * (prodotto) quel numero a^{-1} tale che $a*a^{-1}= a^{-1} *a =1$.

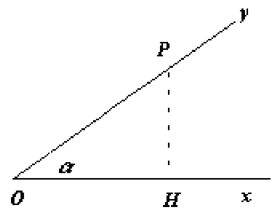
Relazione
Dato un insieme A, si dice relazione binaria, R, nell'insieme A, un sottoinsieme R del prodotto cartesiano A x A.
Se *a* e *b* sono due elementi di A, si dice che *a* è in relazione con *b*, e si scrive *a*R*b*, se e solo se la coppia ordinata (*a, b*) appartiene al sottoinsieme R.
Una relazione binaria in un insieme A può verificare qualcuna delle seguenti cinque proprietà:
- *riflessiva*: *a*R*a* per ogni $a \in$ A (ovvero I è contenuta in R);
- *antiriflessiva*: per ogni $a \in$ A non si ha mai *a*R*a;*
- *transitiva*: se *a*R*b* e *b*R*c*, allora *a*R*c*;
- *simmetrica*: se *a*R*b* allora *b*R*a* ;
- *anti-simmetrica*: se *a*R*b* allora *b*R*a* se e solo se $a = b$.

Una relazione che verifica le proprietà riflessiva, transitiva e simmetrica si dice *relazione di equivalenza*.
Una relazione che verifica le proprietà riflessiva, transitiva e antisimmetrica si dice relazione di ordine parziale.
Una relazione si dice di ordine in senso stretto se verifica le proprietà antiriflessiva, transitiva e antisimmetrica.
Una relazione di ordine si dice totale se dati due qualsiasi elementi, a e b, di A si ha sempre o $a \leq b$ o $b \leq a$.

Rotazione
Si dice rotazione di centro O e ampiezza α la trasformazione che mantiene fisso il punto O, detto centro, e associa ad ogni punto P del piano, distinto da O, un punto P' tale che la distanza OP sia uguale alla distanza OP' e che l'angolo POP' sia uguale ad α.
Equazioni della rotazione di centro O ed ampiezza α:

Ruffini
Regola di Ruffini: regola utilizzata per dividere un polinomio di grado n per un binomio di primo grado del tipo *(x-a)*.

Secante
Una retta r seca una curva C in un punto P, se P è un punto comune ad r e a C e se con P non coincidono altri punti comuni ad r e a C.
Secante di un angolo: dato un angolo orientato xOy, si definisce sua secante il rapporto costante, se esiste, fra la distanza di un qualunque punto P (diverso da O) dall'origine O e la distanza orientata della proiezione H di P sulla retta Ox da O. La secante di un angolo x si indica con secx.

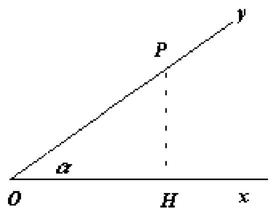


Quindi è: secα = OP/OH.
Dalla definizione data segue che, per tutti gli angoli diversi da $\pi/2+k\pi$, è: secα=1/cosα.

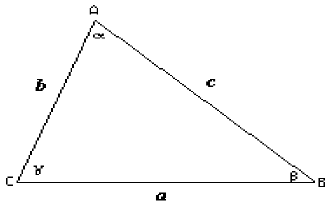
Semifattoriale
Dato un numero naturale positivo n, si chiama suo semifattoriale, e si indica con il simbolo n!!, il prodotto di n per tutti i numeri pari ad esso precedenti, se n è pari; il prodotto di n per tutti i numeri dispari precedenti n, se n è dispari.

Semiretta
Un qualsiasi sottoinsieme connesso e non limitato di una retta.

Seno
Seno di un angolo: dato un angolo orientato xOy, si definisce suo seno il rapporto costante fra la distanza di un qualunque punto P dalla retta Ox e la distanza di P dall'origine O. Il seno di un angolo α si indica con senα ed è un numero privo di dimensioni, appartenente all'intervallo [-1;1].



Quindi è: senα = PH/OP.
Teorema dei seni: in un triangolo qualsiasi è:



$$\frac{a}{sen\alpha}=\frac{b}{sen\beta}=\frac{c}{sen\gamma}$$

Significative
Si dicono cifre significative di un numero *n* le sue cifre che non sono affette da errore, più la prima cifra incerta.

Simmetria
Simmetria assiale: due punti distinti A e B, si dicono simmetrici rispetto a una retta r se il loro punto medio appartiene ad r e se il segmento AB è perpendicolare alla retta r.
Chiamiamo simmetria assiale, di asse *r*, la trasformazione del piano in sé che ad ogni punto del piano associa il suo simmetrico rispetto alla retta *r*.
In un riferimento cartesiano ortogonale le equazioni di una simmetria assiale sono le seguenti.

Rispetto all'asse delle *x*

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=-y \end{cases}$$

Rispetto all'asse delle *y*

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$$

Rispetto alla retta *y=h*

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=2h-y \end{cases}$$

Rispetto alla retta *x=h*

$$\begin{cases} x'=2h-x \\ y'=y \end{cases}$$

Rispetto alla retta *y=x*

$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases}$$

Rispetto alla retta *y= -x*

$$\begin{cases} x'=-y \\ y'=-x \end{cases}$$

Simmetria centrale: due punti A e B si dicono simmetrici rispetto a un punto O se O è il punto medio del segmento AB.
Si dice simmetria centrale, rispetto a un dato punto *O* detto centro, una trasformazione del piano in sé che ad ogni punto *A* del piano associa il suo simmetrico, A^1 rispetto ad *O*.
Le equazioni di una simmetria centrale sono date da:

rispetto all'origine *O(0,0)*

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases}$$

rispetto al punto A *(a,b)*

$$\begin{cases} x'=2a-x \\ y'=2b-y \end{cases}$$

Sommatoria
Simbolo, dato dalla lettera greca sigma maiuscola ∑, usato per indicare in forma concisa l'operazione di somma.

Sottoinsieme

Si dice che B è sottoinsieme di A e si scrive $B \subseteq A$ (oppure $A \supseteq B$ se ogni elemento di B è un elemento di A. In simboli: $\forall\, x \in B : x \in A$ .Si osservi che $A = B$ se e solo se ($A \subseteq B$ e $B \subseteq A$)

inoltre $\varnothing \subseteq A$ (qualunque sia A).

Un sottoinsieme B di A diverso da A e dall'insieme vuoto si dice sottoinsieme proprio e si scrive $B \subset A$ (oppure $A \supset B$)

Proprietà della relazione inclusione: siano A, B, C insiemi qualsiasi, si ha:

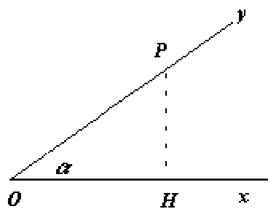
$A \subseteq A$ (proprietà riflessiva)

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ allora $A = B$ (proprietà antisimmetrica)

se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ allora $A \subseteq C$ (proprietà transitiva)

Tangente
Una retta si dice tangente ad una curva in un punto P se nel punto P la retta e la curva hanno in comune due punti coincidenti. Il concetto di tangente è un concetto locale: una retta r può essere tangente ad una curva in un punto e secante alla stessa curva in un altro punto. Si può dire anche che la tangente ad una curva in un punto P è la posizione limite, se esiste , della retta secante che unisce i punti P e Q della curva, al tendere di Q a P.

Tangente di un angolo
Dato un angolo orientato xOy , descritto dal raggio vettore Oy rispetto alla semiretta origine Ox , si chiama sua tangente il rapporto, se esiste, della distanza orientata di un qualunque punto P di Oy, diverso da O, dalla retta Ox e la distanza orientata della proiezione di P su Ox dall'origine O.
La tangente di un angolo α si indica col simbolo tgα.
Quindi tgα= PH/OH
Inoltre è: tgα = $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$.



Funzione tangente
Ponendo y= tg x si ottiene l'espressione analitica di una funzione , detta funzione tangente , definita per x diverso da $\pi / 2 + k\pi$ e con codominio R.

Transitiva
Proprietà transitiva: se, presi tre elementi a, b, c di un insieme I ed una relazione R, si dice che la relazione R gode della proprietà transitiva se quando vale: aRb e bRc allora aRc.

Traslazione
Chiamiamo traslazione una trasformazione geometrica in cui due punti si corrispondono se il segmento che li unisce è congruente ed equiverso ad un segmento orientato dato , detto vettore di traslazione. In un riferimento cartesiano ortogonale le equazioni di una traslazione qualsiasi di vettore v=(a,b) sono:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

Unione
Dati due insiemi A e B si chiama loro unione, e si indica con il simbolo $A \cup B$, l'insieme i cui elementi sono elementi di A o elementi di B.

Unità
Elemento u che, in una struttura algebrica A, in cui è definita una operazione * **,** gode della proprietà che u*a=a*u=a per ogni *a* di A, l'unità è anche detta elemento neutro. Nel campo dei numeri reali prende il nome di elemento unità il numero 1, cioè l'elemento neutro rispetto al prodotto.

Univoca
Sinonimo di "a un sol valore". Una funzione è una corrispondenza univoca, cioè tale che ad ogni elemento del dominio corrisponde uno e un solo elemento del codominio.

Valore assoluto
Dato il numero reale x si dice valore assoluto di x, e si indica col simbolo |x|, il numero stesso se questo è positivo o nullo, il suo opposto se esso è negativo. Le proprietà fondamentali del valore assoluto sono le seguenti:

$|x| \geq 0 \ \forall x \in R \quad |x| = 0$ se e solo se $x = 0$

$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b| \qquad \forall a,b \in R$

$||a| - |b|| \leq |a - b| \qquad \forall a,b \in R$

$x_1 > x_2 \Rightarrow |x_1| > |x_2|$ se $x_1, x_2 > 0$

$x_1 > x_2 \Rightarrow |x_1| < |x_2|$ se $x_1, x_2 < 0$

Variabile
Quantità non conosciuta, che può assumere tutti i valori numerici appartenenti a un determinato insieme numerico.

Verità
Tavola di verità: tabella dove si riportano i valori di verità di una proposizione logica composta, al variare di tutti i possibili valori di verità che possono assumere le proposizioni elementari componenti.

Vuoto
Insieme vuoto: insieme privo di elementi. E' un sottoinsieme improprio di qualunque insieme e si indica con: $\varnothing$

BIBLIOGRAFIA

Bernardi	Logica	
Boeri-Chiti	Precorso di matematica	ed Zanichelli
Bramanti	Precalculus	ed Progetto Leonardo-Bologna
Maraschini-Palma	Format spe	ed Paravia
G.Zwirner, L.Scaglianti	Pensare la matematica	ed. Cedam
Bruno, Cavalieri, Lattanzio	Metodi e Moduli di Matematica	ed.A.Mondatori
Andreini,Manara,Prestipino	Matematica Controluce	ed.Mc Graw-Hill
Tonolini,Manenti Calvi	Fondamenti e percorsi	ed.Minerva Italica
Cremaschi	Matematica per problemi	ed. Zanichelli