APPUNTI SUI RADICALI

$$\sqrt{a^2+b^2}$$

INDICE

INTRODUZIONE AI RADICALI

Si ricorda che si dice numero razionale un qualsiasi numero che può essere scritto sotto forma di frazione.

Sono quindi numeri razionali →
- **Tutti i numeri interi**
- **Tutti i numeri decimali limitati**
- **Tutti i numeri decimali periodici**

Si dice invece numero irrazionale ogni numero che non può essere scritto sotto forma di frazione.
Un numero razionale o irrazionale si dice numero Reale.

NUMERI REALI {
- **NUMERI RAZIONALI** →
  - NUMERI INTERI
  - NUMERI DECIMALI LIMITATI
  - NUMERI DECIMALI PERIODICI
- **NUMERI IRRAZIONALI** → Non si possono scrivere sotto forma di frazione = NUMERI DECIMALI ILLIMITATI E NON PERIODICI

Sia *a* un numero reale relativo qualunque ed *n* un numero intero positivo; si vuole sapere se esiste un numero reale relativo *x* che elevato ad *n* dia *a* (cioè tale che $x^n = a$).

Se il numero *x* esiste lo chiamiamo ***radice algebrica ennesima di a*** **(**$\sqrt[n]{a}$ **).**

Il simbolo $\sqrt[n]{a}$ **s**i legge "radice ennesima di *a*" dove:

$$\sqrt[n]{a} \quad \begin{cases} a = \text{ RADICANDO} \\ n = \text{ INDICE DELLA RADICE} \\ \sqrt{\ } = \text{SEGNO DELLA RADICE} \end{cases}$$

Se l'indice della radice n = 2, cioè quando si tratta di una radice quadrata si scrive semplicemente $\sqrt{a}$.

Quindi ***la radice algebrica* n-esima di a (numero positivo o negativo) è quel numero (positivo o negativo) la cui potenza n-esima dia il numero dato (cioè a).**

Facendo un breve richiamo sulle proprietà delle potenze abbiamo:

- Se $a > 0$ allora $a^n > 0$ sia che n sia pari o dispari;

- Se $a < 0$ allora $\begin{cases} a^n > 0 \text{ se } n \text{ è pari;} \\ a^n < 0 \text{ se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$

Ricordando che se $a^n = b$ si deve determinare a, allora si avrà $a = \sqrt[n]{b}$ e che quindi l'operazione di estrazione di radice altro non è che l'operazione inversa rispetto a quella di elevamento a potenza, si deduce da quanto abbiamo visto dalle proprietà delle potenze che la radice algebrica di un numero a (positivo o negativo) è tale che:

- Quando l'indice di radice ***è pari*** (cioè se n è pari) allora:
    1. se il radicando a è positivo (cioè se $a > 0$) allora ammette come soluzioni **2 valori** che hanno lo stesso Valore Assoluto (ricordiamo che il valore assoluto o *modulo* di un numero relativo a (indicato con $|a|$) è il numero stesso privato del segno) ma segno opposto cioè: $\sqrt{a} = \pm b$;
    2. se il radicando a è negativo (cioè se $a < 0$) allora **non ammette alcuna soluzione** nel campo dei numeri reali (infatti la potenza pari di un numero negativo è sempre positiva: esempio $-4^2 = 16$).

- Quando l'indice di radice ***è dispari*** (cioè se n è dispari) allora:

1. se il radicando a è positivo (cioè se $a > 0$) allora ammette come soluzione **un unico valore positivo**;
2. se il radicando a è negativo (cioè se $a < 0$) allora ammette come soluzione **un unico valore negativo**.

Riepilogando $\sqrt[n]{a}$

- Se *n è pari* allora $\begin{cases} a > 0 \text{ (due soluzioni) } \sqrt[n]{a} = \pm b; \\ a < 0 \text{ (nessuna soluzione nel campo dei numeri reali } \mathbb{R}) \end{cases}$

- Se *n è dispari* allora $\begin{cases} a > 0 \text{ (unica soluzione) } \sqrt[n]{a} = b; \\ a < 0 \text{ (unica soluzione) } \sqrt[n]{-a} = -b; \end{cases}$

Esiste un altro tipo di radicale che è il ***radicale aritmetico***.

Il ***radicale aritmetico*** $\sqrt[n]{a}$ (con $a > 0$) è invece il numero reale non negativo la cui potenza *n-esima* è uguale ad a .

Attenzione: nelle radici aritmetiche il radicando si suppone sempre positivo (cioè $a > 0$ sempre).

Pertanto **la radice aritmetica *n- esima* di un numero *a* esiste ed è unica**.

Piccola precisazione:

in seguito si esamineranno molte proprietà dei **radicali aritmetici**, proprietà che non saranno, almeno in generale, estendibili ai radicali algebrici.

I nostri radicandi saranno, quindi, sempre numeri non negativi e nel caso fossero rappresentati da espressioni letterali, sarà sempre sottinteso che alle lettere si potranno attribuire solo valori che rendano non negativi i valori assunti dalle espressioni stesse.

Sotto queste condizioni saranno sempre valide le successive proprietà.

Si ricorda, inoltre, che nel caso di radicando nullo si pone $\sqrt[n]{0} = 0$.

PROPRIETA' INVARIANTIVA

Il valore di un radicale aritmetico non cambia se moltiplichiamo o dividiamo l'indice del radicale e l'esponente del radicando per uno stesso numero positivo (non nullo).

In simboli abbiamo:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$$

Dimostrazione:

Ricordando che se $a^n = b^n$ si ha anche $a = b$ allora si eleva alla *np* il 1° ed il 2° membro dell'uguaglianza e si avrà

1° MEMBRO: $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left[\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{n}\right]^{p} = \left[a^m\right]^p = a^{mp}$

2° MEMBRO: $\left(\sqrt[np]{a^{mp}}\right)^{np} = a^{mp}$

Si è ottenuto lo stesso risultato e quindi la proprietà invariantiva è stata dimostrata.

La proprietà invariantiva è molto importante in quanto trova notevoli applicazioni nel calcolo dei radicali.

Esempio:

$\sqrt{a^3} = \sqrt[8]{a^{12}}$ eleviamo i 2 membri alla ottava potenza

1° MEMBRO $\left(\sqrt{a^3}\right)^8 = \left(\sqrt{a^3}\right)^{2\bullet 4} = \left[\left(\sqrt{a^3}\right)^2\right]^4 = \left[a^3\right]^4 = a^{12}$

2° MEMBRO $\left(\sqrt[8]{a^{12}}\right)^8 = a^{12}$

SEMPLIFICAZIONE DI UN RADICALE

Un radicale si può semplificare quando è possibile dividere l'indice di radice e gli esponenti del radicando per uno stesso numero.

Quando l'operazione non è possibile allora l'indice di radice e gli esponenti del radicando risultano primi fra loro ed il radicale si dice ***irriducibile***.

Per semplificare un radicale si procede come segue:

1. Si decompone il radicando in fattori primi;
2. Si calcola il M. C. D. (Massimo Comune Divisore) fra l'indice del radicale e gli esponenti dei fattori del radicando;
3. Si divide per il M. C. D. trovato sia l'indice del radicale che gli esponenti dei fattori del radicando.

Esempio:

$\sqrt[6]{a^2(x+y)^{14}}$ il M. C. D. di 6 - 2 - 14 è = 2

si divide l'indice e gli esponenti e si ottiene

$\sqrt[3]{a(x+y)^7}$ che è un radicale equivalente a quello di partenza.

Se il M. C. D. = 1 allora il radicale, come si è già detto, si dice **irriducibile**.

RIDUZIONE DI RADICALI ALLO STESSO INDICE

Per ridurre 2 o più radicali (aritmetici) allo stesso indice si procede come segue:

1. si decompongono in fattori primi tutti i radicali;
2. si rendono irriducibili tutti i radicali;
3. si calcola il m. c. m. (minimo comune multiplo) fra gli indici di tutti i radicali e lo si assume come *minimo comune indice* per tutti i radicali;
4. si divide il m. c. m. per l'indice di ciascun radicale e si moltiplica il quoziente ottenuto per l'esponente di ogni fattore di ciascun radicando.

Esempio:

$\sqrt[10]{a^4 b^6}$; $\sqrt[4]{a^2 + 2ab + b^2}$; $\sqrt[3]{(b-5)^2}$;

1° PASSAGGIO: $\sqrt[10]{a^4 b^6}$; $\sqrt[4]{(a+b)^2}$; $\sqrt[3]{(b-5)^2}$;

2° PASSAGGIO: $\sqrt[5]{a^2 b^3}$; $\sqrt{a+b}$; $\sqrt[3]{(b-5)^2}$;

3° PASSAGGIO: m. c. m. (5, 2, 3) = 30;

4° PASSAGGIO: $\sqrt[30]{a^{12} b^{18}}$; $\sqrt[30]{(a+b)^{15}}$; $\sqrt[30]{(b-5)^{20}}$.

La riduzione di radicali allo stesso indice può essere utilizzata anche per mettere in ordine (crescente o decrescente) o per confrontare 2 o più radicali.

Esempio:

Mettiamo in ordine crescente i seguenti radicali

$\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[6]{17}$; $\sqrt{3}$;

allora il m. c. m. (2, 3, 6, 2) = 6

$\sqrt[6]{2^3}$; $\sqrt[6]{7^2}$; $\sqrt[6]{17}$; $\sqrt[6]{3^3}$ = $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[6]{49}$; $\sqrt[6]{17}$; $\sqrt[6]{27}$ e visto che

$8 < 17 < 27 < 49$ si ha anche $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{17} < \sqrt[6]{27} < \sqrt[6]{49}$ e quindi ritornando all'inizio

$\sqrt{2} < \sqrt[6]{17} < \sqrt{3} < \sqrt[3]{17}$

MOLTIPLICAZIONE DI RADICALI

Il prodotto di 2 o più radicali aritmetici <u>*aventi lo stesso indice*</u> *è un radicale aritmetico che ha per indice lo stesso indice e per radicando il prodotto dei radicandi.*

Quindi prima di procedere alla moltiplicazione, la prima operazione da fare se i radicali non hanno lo stesso indice è quella di ridurli allo stesso indice e solo allora eseguire la moltiplicazione.

In simboli: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ oppure

$\sqrt[n]{a^3b^2} \cdot \sqrt[n]{a^2b^3}$ (ricordando la proprietà del prodotto di potenze aventi la stessa base $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$) si ha

$\sqrt[n]{a^5b^5}$

Dimostrazione della regola del prodotto:

Eleviamo alla n-esima potenza il 1° ed il 2° membro dell'uguaglianza

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ si ha:

1° MEMBRO: $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$

2° MEMBRO: $\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab$

Avendo ottenuto lo stesso risultato la regola è stata dimostrata.

E' ovvio che se $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ allora sarà anche $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Esempio:

$$\sqrt[3]{\frac{9}{x^2+2xy+y^2}}\cdot\sqrt{\frac{x^2+y^2}{18xy}+\frac{1}{9}}\cdot\sqrt[6]{\frac{9}{(x+y)^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{9}{(x+y)^2}}\cdot\sqrt{\frac{x^2+y^2+2xy}{18xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3^2}{(x+y)^2}}=$$

$$=\sqrt[3]{\frac{3^2}{(x+y)^2}}\cdot\sqrt{\frac{(x+y)^2}{2\cdot 3^2xy}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3^2}{(x+y)^2}}=$$

$$=\sqrt[6]{\frac{3^4}{(x+y)^4}}\cdot\sqrt[6]{\frac{(x+y)^6}{2^3\cdot 3^6x^3y^3}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3^2}{(x+y)^2}}=$$

$$\sqrt[6]{\frac{\cancel{3^4}}{\cancel{(x+y)^4}}\cdot\frac{\cancel{(x+y)^6}}{2^3\cdot\cancel{3^6}x^3y^3}\cdot\frac{\cancel{3^2}}{\cancel{(x+y)^2}}}=\sqrt[6]{\frac{1}{2^3x^3y^3}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2xy}}$$

QUOZIENTE DI RADICALI

Il quoziente tra 2 radicali <u>*aventi lo stesso indice*</u> *è un radicale che ha per indice lo stesso indice e per radicando il quoziente dei radicandi.*

Da ciò si deduce che per dividere 2 radicali aventi indice diversi occorre ridurli preventivamente allo stesso indice.

In simboli si ha quindi: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Dimostrazione della regola del quoziente:

Eleviamo alla *n-esima* potenza sia il 1° che il 2° membro. Si ha, applicando la proprietà fondamentale dei radicali e la regola del quoziente di potenze di stesso esponente

1° MEMBRO: $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^{n} = \dfrac{\sqrt[n]{a^{n}}}{\sqrt[n]{b^{n}}} = \dfrac{a}{b}$

2° MEMBRO: $\left(\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\right)^{n} = \dfrac{a}{b}$

Avendo ottenuto lo steso risultato la regola è dimostrata.

Esempio:

$$\sqrt[4]{\frac{2x^{2}+2y^{2}}{3xy}} \div \sqrt{\frac{(x+y)^{2}-2xy}{3x^{2}y}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{2\left(x^{2}+y^{2}\right)}{3xy}} \div \sqrt{\frac{x^{2}+y^{2}+2xy-2xy}{3x^{2}y}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{2\left(x^{2}+y^{2}\right)}{3xy}} \div \sqrt{\frac{x^{2}+y^{2}}{3x^{2}y}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{2\left(x^{2}+y^{2}\right)}{3xy}} \div \sqrt[4]{\frac{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}}{3^{2}x^{4}y^{2}}} =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{2\left(\cancel{x^{2}}+\cancel{y^{2}}\right)}{\cancel{3}\,\cancel{x}\cancel{y}} \cdot \frac{3^{\cancel{2}}\,x^{\cancel{4}\,3}\,y^{\cancel{2}}}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\cancel{2}}}} = \sqrt[4]{\frac{6x^{3}y}{x^{2}+y^{2}}}$$

Anche in questo caso, come si è già visto con il prodotto, applicando la proprietà simmetrica dell’uguaglianza si ha: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

TRASPORTO DI UN FATTORE (POSITIVO) SOTTO IL SEGNO DI RADICE

Per portare un fattore positivo sotto il segno di radice è necessario moltiplicare l'esponente del fattore per l'indice della radice.

Consideriamo il radicale $a\sqrt[n]{b}$ per portare sotto il segno di radice il fattore *a* (supposto positivo) si opera con la proprietà fondamentale dei radicali, cioè:

$a = \sqrt[n]{a^n}$ ed applicando la regola vista per la moltiplicazione

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Se il fattore da portare dentro il segno di radice è negativo, allora si porta dentro la radice il suo Valore Assoluto e si lascia fuori dalla radice il segno.

Esempi:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48};$$

$$3^3\sqrt[5]{3} = \sqrt[5]{3^{15} \cdot 3} = \sqrt[5]{3^{16}};$$

$$2a^3b^2\sqrt[3]{a^2b} = \sqrt[3]{2^3a^9b^6a^2b} = \sqrt[3]{2^3a^{11}b^7} = \sqrt[3]{8a^{11}b^7};$$

$$-2\sqrt{2} = -\sqrt{2^2 \cdot 2} = -\sqrt{2^3} = -\sqrt{8};$$

$$-3\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = -\sqrt[3]{3^4} = -\sqrt[3]{81}$$

TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DAL SEGNO DI RADICE

Per trasportare fuori dal segno di radice un fattore (avente un esponente maggiore dell'indice della radice) basta assegnargli come esponente il quoziente intero della divisione fra esponente (del fattore) ed indice della radice, mentre sotto il segno di radice resterà il fattore con esponente uguale al resto della divisione.

Quindi, innanzitutto, per effettuare l'operazione è necessario che l'esponente del fattore sia maggiore dell'indice della radice.

Si ha allora $\sqrt[n]{a^m}$ con m > n . E' possibile allora effettuare la divisione tra *m* ed *n*.

Indicando con *q* il quoziente e con *r* il resto si ha: $m = nq + r$ si applica la proprietà inversa del prodotto di potenze con stessa base: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{nq+r}} = \sqrt[n]{a^{nq} \cdot a^r}$ per la regola inversa del prodotto di radicali e portando successivamente il 1° radicale a forma irriducibile si ha:

$$\sqrt[n]{a^{nq} \cdot a^r} = \sqrt[n]{a^{nq}} \cdot \sqrt[n]{a^r} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$$

E s e m p i:

$$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3\sqrt{3};$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 2^2} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt[3]{4^5} = 4\sqrt[3]{4^2} = 4\sqrt[3]{16}$$

Si osserva che per trasportare un fattore fuori dal segno di radice bisogna prima decomporre in fattori il radicando ed, eventualmente, semplificare il radicale.

Esempio: $$\sqrt{\frac{\left(a^2 - b^2\right)^5}{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}} = \sqrt{\frac{(a-b)^5 \cdot (a+b)^5}{(x+y)^3}} =$$

$$= \frac{(a-b)^2 \cdot (a+b)^2}{x+y} \cdot \sqrt{\frac{(a-b)\cdot(a+b)}{x+y}} =$$

$$= \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{x+y} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{x+y}}$$

POTENZA DI UN RADICALE

La potenza n-esima di un radicale di indice m è un radicale di indice m e che ha per radicando la potenza n-esima del radicando.

Quindi per elevare ad una potenza un radicale basta elevare a quella potenza il radicando.

In formula si ha: $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$

Dimostrazione:

Eleviamo alla m il 1° ed il 2° membro. Applichiamo quindi la proprietà della potenza, la proprietà commutativa della moltiplicazione e la proprietà fondamentale dei radicali:

1° MEMBRO: $\left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^n\right]^m = \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^{n\cdot m}\right) = \left[\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right]^n = a^n$

2° MEMBRO: $\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m$ applichiamo la proprietà fondamentale dei radicali

$$= \left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n$$

Avendo ottenuto lo stesso risultato la regola è stata dimostrata.

Esempi:

1° = $\left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a}$

2° = $\left(\sqrt[5]{b^2}\right)^2 = \sqrt[5]{b^4}$

3° = $\left(\sqrt[4]{a-b}\right)^2 = \sqrt[4]{(a-b)^2} = \sqrt{a-b}$

4° = $\left(\sqrt[5]{(x+y)^2\cdot(x-y)^3}\right)^4 = \sqrt[5]{(x+y)^8\cdot(x-y)^{12}} = (x+y)\cdot(x-y)^2\sqrt[5]{(x+y)^3\cdot(x-y)^2}$

Inoltre se l'indice del radicale e l'esponente della potenza ammettono un M. C. D. allora prima di elevare il radicale alla data potenza, bisogna semplificare.

Esempio:

$$\left(\sqrt[\cancel{6}\,3]{(x-y)^3\cdot(x+y)^5}\right)^{\cancel{14}\,7}=\sqrt[3]{(x-y)^{21}\cdot(x+y)^{35}}=(x-y)^7\cdot(x+y)^{11}\sqrt[3]{(x+y)^2}$$

RADICE ARITMETICA DI UN RADICALE ARITMETICO

La radice n-esima della radice m-esima è il radicale di indice m n che ha per radicando lo stesso radicando.

In formula: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Dimostrazione:

Eleviamo alla *m n* sia il 1° che il 2° membro.

Si ha per la proprietà della potenza di potenza $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$ e per la proprietà fondamentale dei radicali:

1° MEMBRO: $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn} = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$

2° MEMBRO: $\left(\sqrt[nm]{a}\right)^{mn} = a$

Avendo ottenuto lo stesso risultato la regola è stata dimostrata.

Esempi:

1° $= \sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[15]{3}$;

2° $= \sqrt[6]{\sqrt{64}} = \sqrt[12]{64} = \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2}$;

3° $= \sqrt[5]{\sqrt{a^{35}}} = \sqrt[10]{a^{35}} = \sqrt{a^7} = a^3\sqrt{a}$;

La proprietà della radice di radice può essere applicata più volte:

E s e m p i o :

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}} = \sqrt[8]{3};$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{a^{3}}}} = \sqrt[\cancel{24}\,8]{a^{\cancel{3}}} = \sqrt[8]{a}$$

Inoltre quando fra i simboli di radice compaiono dei fattori è necessario, prima di applicare la proprietà della radice di radice, portare tali fattori all'interno della radice.

Esempi:

$$1° = \sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$2° = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^3\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{2^7}}} = \sqrt[8]{2^7}$$

$$3° = \sqrt{ab\sqrt{ab\sqrt[3]{ab}}} = \sqrt{\sqrt{a^3b^3\sqrt[3]{ab}}} = \sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{a^{10}b^{10}}}} = \sqrt[12]{a^{10}b^{10}} = \sqrt[6]{a^5b^5}$$

SOMMA ALGEBRICA DI RADICALI ARITMETICI

Per eseguire la somma algebrica di radicali è necessario ragionare in maniera analoga a quanto visto per i monomi.
Innanzitutto si ricorda che un radicale aritmetico si dice ridotto quando sul radicando si sono eseguite tutte le semplificazioni possibili e si sono portati fuori dal segno di radice tutti quei fattori aventi esponente maggiore o uguale all'indice del radicale.
Il fattore che si trova davanti ad un radicale ridotto si chiama ***coefficiente del radicale***.
Quindi 2 o più radicali aritmetici si dicono ***simili*** quando hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e differiscono, eventualmente, solo per il coefficiente.

Ad esempio sono simili i seguenti radicali: $2\sqrt[5]{ab^2}$; $ab^2\sqrt[5]{ab^2}$; $\frac{1}{4}\sqrt[5]{ab^2}$.

Allora:

1. *se i radicali sono tutti simili, la somma algebrica di 2 o più radicali è il radicale simile ai dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti;*
2. *se i radicali non sono tutti simili, la loro somma algebrica è data dalla somma indicata dei radicali non simili dopo aver eseguito, con la regola precedente, la somma dei radicali simili (cioè si sommano tra di loro solo i radicali simili).*

Ricordando che l'operazione di estrazione di radice non gode della proprietà distributiva rispetto alla somma ed alla sottrazione (mentre vale per la moltiplicazione e per la divisione) non bisogna commettere l'errore seguente:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b} \\ \\ \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b} \end{bmatrix} \text{ERRORE!!!}$$

Esempi:

$$1° = 11\sqrt{2}+3\sqrt{2}-7\sqrt{2}-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=(11+3-7-4+2)\sqrt{2}=5\sqrt{2}$$

$$2° = 8\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{81}=8\sqrt[3]{3}-7\sqrt[3]{3}+2\cdot 3\sqrt[3]{3}=(8-7+6)\sqrt[3]{3}=7\sqrt[3]{3}$$

$$3° = \frac{1}{3}\sqrt{45}+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{20}{9}}-\frac{13}{2}\sqrt{\frac{5}{36}}=\frac{1}{3}\sqrt{3^2 5}+\frac{1}{8}\sqrt{\frac{2^2 5}{3^2}}-\frac{13}{2}\sqrt{\frac{5}{6^2}}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}\sqrt{5}+\frac{\cancel{2}}{\cancel{24}_{12}}\sqrt{5}-\frac{13}{12}\sqrt{5}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{12}-\frac{13}{12}\right)\sqrt{5}=\left(\frac{12+1-13}{12}\right)\sqrt{5}=0$$

RAZIONALIZZAZIONE DEL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE

Quando in una frazione compaiono al denominatore uno o più radicali si può *razionalizzare* l'espressione.

Razionalizzare il denominatore di una frazione significa trovare una frazione equivalente alla data avente il denominatore privo di radicali e per far questo si applica la proprietà invariantiva delle frazioni, cioè si moltiplicano numeratore e denominatore per una stessa quantità (che si chiama nel caso specifico fattore razionalizzante).

Distinguiamo i seguenti casi:

1° CASO: Al denominatore compare un solo radicale cioè il denominatore presenta come fattore il termine $\sqrt{b}$.

In questo caso la razionalizzazione avviene moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{b}$. Infatti:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Esempio:

$$\frac{3}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{2\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{\cancel{3}\sqrt{6}}{\cancel{12}_4} = \frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} = \frac{x}{\sqrt{x+y}} \cdot \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}} = \frac{x\sqrt{x+y}}{\left(\sqrt{x+y}\right)^2} = \frac{x\sqrt{x+y}}{x+y}$$

Nel caso il denominatore presenti come fattore il termine $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$ allora la razionalizzazione avviene moltiplicando numeratore e denominatore per il fattore razionalizzante $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Infatti moltiplicando si ha:

$$\frac{a}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{m+n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \frac{a\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Esempio:

$$\frac{2}{7\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2}{7\sqrt[5]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{2\sqrt[5]{2^2}}{7\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\cancel{2}\sqrt[5]{2^2}}{7 \cdot \cancel{2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{7} = \frac{\sqrt[5]{4}}{7}$$

Nel caso che $m < n$ è necessario, prima di razionalizzare, portare fuori dal segno di radice i possibili fattori.

Esempio:

$$\frac{3}{\sqrt[3]{2^7}} = \frac{3}{2^2\sqrt[3]{2}} = \frac{3}{4\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{4\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{2^2}}{8}$$

<u>2° CASO</u>: Al denominatore compare la somma algebrica di 2 quantità di cui almeno una è un radicale.

Potrebbe quindi comparire:

a) $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; b) $\frac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; c) $\frac{m}{a-\sqrt{b}}$; d) $\frac{m}{a+\sqrt{b}}$; e) $\frac{m}{\sqrt{a}+b}$; f) $\frac{m}{\sqrt{a}-b}$

Per razionalizzare basta ricordare la formula del prodotto della somma di due monomi per la loro differenza cioè

$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ e quindi $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a-b$

Avremo quindi per i vari casi:

a) $\dfrac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ il fattore razionalizzante risulta $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ e si ha: $\dfrac{m\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{m\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$;

b) $\dfrac{m}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ il fattore razionalizzante risulta $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ e si ha: $\dfrac{m\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=\dfrac{m\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}{a-b}$;

c) $\dfrac{m}{a-\sqrt{b}}$ il fattore razionalizzante risulta $a+\sqrt{b}$ e si ha: $\dfrac{m\left(a+\sqrt{b}\right)}{\left(a-\sqrt{b}\right)\cdot\left(a+\sqrt{b}\right)}=\dfrac{m\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$;

d) $\dfrac{m}{a+\sqrt{b}}$ il fattore razionalizzante risulta $a-\sqrt{b}$ e si ha: $\dfrac{m\left(a-\sqrt{b}\right)}{\left(a+\sqrt{b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{b}\right)}=\dfrac{m\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b}$;

e) $\dfrac{m}{\sqrt{a}+b}$ il fattore razionalizzante risulta $\sqrt{a}-b$ e si ha: $\dfrac{m\left(\sqrt{a}-b\right)}{\left(\sqrt{a}+b\right)\cdot\left(\sqrt{a}-b\right)}=\dfrac{m\left(\sqrt{a}-b\right)}{a-b^2}$;

f) $\dfrac{m}{\sqrt{a}-b}$ il fattore razionalizzante risulta $\sqrt{a}+b$ e si ha: $\dfrac{m\left(\sqrt{a}+b\right)}{\left(\sqrt{a}-b\right)\cdot\left(\sqrt{a}+b\right)}=\dfrac{m\left(\sqrt{a}+b\right)}{a-b^2}$;

Esempi:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=3\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right);$

2) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\dfrac{\cancel{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\cancel{2}}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right);$

3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}=\dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2}{6-5}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^2=6-2\sqrt{30}+5=11-2\sqrt{30};$

4) $\dfrac{7-4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3}=\dfrac{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)}{\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)}=\dfrac{\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)}{12-9}=\dfrac{14\sqrt{3}+21-24-12\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

3° CASO: Al denominatore compare un polinomio di 3 o più termini dei quali almeno 2 contengono come fattori dei radicali quadratici.

Per razionalizzare si raccolgono i fattori del denominatore in modo da ricondurlo al 2° caso, dopo di che rimarranno al denominatore ancora uno o più radicali. Si applicano allora le regole già viste del 1° e del 2° caso.

Esempio:

$$\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}=\frac{3}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{7}\right)}$$ fattore razionalizzante $\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}\right)\right]$ si ha

$$=\frac{3\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}\right)\right]}{\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{7}\right)\right]\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}\right)\right]}=\frac{3\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}\right)\right]}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-7}=\frac{3\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}\right)\right]}{3+5+2\sqrt{15}-7}=$$

$$=\frac{3\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}\right)\right]}{1+2\sqrt{15}}$$ (resta ancora da razionalizzare ed in questo caso (caso 2°)

il fattore razionalizzante è $1-2\sqrt{15}$)

$$=\frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(1-2\sqrt{15}\right)}{1-\left(2\sqrt{15}\right)^2}=\frac{3\left(\sqrt{3}-2\sqrt{45}+\sqrt{5}-2\sqrt{75}+\sqrt{7}-2\sqrt{105}\right)}{1-60}=$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}-6\sqrt{5}-10\sqrt{3}-2\sqrt{105}\right)}{-59}=-\frac{3\left(\sqrt{7}-9\sqrt{3}-5\sqrt{5}-2\sqrt{105}\right)}{59}$$

4° CASO: E' il caso in cui al denominatore compare la somma o la differenza di 2 radicali cubici.

Per determinare il fattore razionalizzante basta ricordare la scomposizione della somma o differenza di 2 cubi:

$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$$

Ponendo quindi $a=\sqrt[3]{x}$ e $b=\sqrt[3]{y}$ si ottiene

$$\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{y}\right)^3=x+y$$

oppure

$$\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{y}\right)^3=x-y$$

Esempio:

1) razionalizzare la seguente espressione

$\dfrac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ il fattore razionalizzante risulta = $\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$ infatti si ha

$$=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3+\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$$

2) razionalizzare la seguente espressione

$\dfrac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ il fattore razionalizzante risulta = $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$ infatti si ha

$$=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}\right)^3-\left(\sqrt[3]{b}\right)^3}=\frac{m\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$$

3) razionalizzare la seguente espressione

$\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ il fattore razionalizzante risulta = $\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{2^2}\right)$ infatti si ha

$$=\frac{2\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}=\frac{2\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(\sqrt[3]{3}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3}=2\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)$$

RADICALI DOPPI

Si chiama ***Radicale Doppio*** un'espressione del tipo:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \text{ oppure } \sqrt{a-\sqrt{b}} \text{ con } a,b \text{ ed } a^2-b \text{ quantità positive.}$$

Per risolvere un radicale doppio valgono le seguenti formule:

$$1 = \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$2 = \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Perché un radicale doppio sia risolubile in 2 radicali semplici, occorre che la quantità a^2-b sia un ***quadrato perfetto***.

Dimostrazione:

Eleviamo il 1° ed il 2° membro della formula

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

avremo quindi:

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2=a+\sqrt{b}$$

e

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}+2\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)=$$

$$=\frac{a+\sqrt{\cancel{a^2}-\cancel{b}}+a-\sqrt{\cancel{a^2}-\cancel{b}}}{2}+2\sqrt{\frac{\left(a+\sqrt{a^2-b}\right)\left(a-\sqrt{a^2-b}\right)}{4}}=$$

$$=\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}}+2\sqrt{\frac{a^2-\left(a^2-b\right)}{4}}=a+2\sqrt{\frac{\cancel{a^2}-\cancel{a^2}+b}{4}}=a+\cancel{2}\sqrt{\frac{\cancel{2}b}{\cancel{4}_{\cancel{2}}}}=a+\sqrt{b}$$

Essendo i 2 risultati uguali la formula è stata dimostrata.

Esempi:

1) $\sqrt{9-\sqrt{56}}$ poichè $a^2-b=81-56=25=5^2$ è un quadrato perfetto

il radicale doppio è trasformabile in 2 radicali

$$=\sqrt{\frac{9+\sqrt{25}}{2}}-\sqrt{\frac{9-\sqrt{25}}{2}}=\sqrt{\frac{9+5}{2}}-\sqrt{\frac{9-5}{2}}=\sqrt{\frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{2}}}-\sqrt{\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$$

2) $\sqrt{7+\sqrt{40}}$ poichè $a^2-b=49-40=9=3^2$ è un quadrato perfetto

il radicale doppio è trasformabile in 2 radicali

$$=\sqrt{\frac{7+\sqrt{9}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{9}}{2}}=\sqrt{\frac{7+3}{2}}+\sqrt{\frac{7-3}{2}}=\sqrt{\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{2}}}+\sqrt{\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

3) $\sqrt{2x+2\sqrt{6x-9}}=\sqrt{2x+\sqrt{4(6x-9)}}$ ponendo $a=2x$ e $b=4(6x-9)$

avremo che $a^2-b=(2x)^2-(24x-36)=4x^2-24x+36=(2x-6)^2$

che è un quadrato perfetto e pertanto avremo

$$=\sqrt{\frac{2x+\sqrt{(2x-6)^2}}{2}}+\sqrt{\frac{2x-\sqrt{(2x-6)^2}}{2}}=\sqrt{\frac{2x+2x-6}{2}}+\sqrt{\frac{\cancel{2x}-\cancel{2x}+6}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cancel{4}^{2}x-\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}}+\sqrt{\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}}}=\sqrt{2x-3}+\sqrt{3}$$

OSSERVAZIONE FINALE

Tutte le operazioni con i radicali viste i precedenza possono comparire riunite nelle espressioni.
Nelle espressioni con i radicali valgono ancora le regole viste nei campi numerici interi e frazionari (sia per quanto riguarda l'ordine delle operazioni da eseguire che per quanto riguarda l'ordine delle parentesi ed il loro scioglimento).
<u>Attenzione: la razionalizzazione va eventualmente effettuata solo a risultato acquisito e non come eliminazione dei denominatori.</u>

FORMULARIO

POTENZE:

Se $a > 0$ allora $a^n > 0$ sia che n sia pari o dispari;

Se $a < 0$ allora $\begin{cases} a^n > 0 \text{ se } n \text{ è pari;} \\ a^n < 0 \text{ se } n \text{ è dispari;} \end{cases}$

POTENZE AVENTI LA STESSA BASE

Prodotto: $a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$

Quoziente: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$

Potenza: $\left(a^m\right)^n = a^{(m \cdot n)}$

POTENZE AVENTI LO STESSO ESPONENTE

Potenza di un prodotto: $\left(a \cdot b \cdot c\right)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n$

Potenza di un quoziente: $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Potenza con esponente negativo: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

PRODOTTI NOTEVOLI

- **Il prodotto della somma di 2 monomi per la loro differenza è un binomio costituito dal quadrato del primo monomio meno in quadrato del secondo monomio:**

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

- **Il quadrato di un binomio è un trinomio costituito dal quadrato del primo termine (con segno positivo), il doppio prodotto del primo per il secondo termine (con segno opportuno $\pm$), il quadrato del secondo termine (con segno positivo):**

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

- **Il quadrato di un trinomio è un polinomio costituito dal quadrato del primo termine (con segno positivo), il quadrato del secondo termine (con segno positivo), il quadrato del terzo termine (con segno positivo), il doppio prodotto del primo per il secondo termine (con segno opportuno $\pm$), il doppio prodotto del primo per il terzo termine (con segno opportuno $\pm$), il doppio prodotto del secondo per il terzo termine (con segno opportuno $\pm$):**

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

- **Il cubo di un binomio è un quadrinomio costituito dal cubo del primo termine (con lo stesso segno), il triplo prodotto del quadrato del primo termine per il secondo termine (con il segno del secondo termine), il triplo prodotto del primo termine per il quadrato del secondo termine (con il segno del primo termine), il cubo del secondo termine (con lo stesso segno) :**

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

in pratica se si tratta del cubo di un binomio costituito dalla differenza di due monomi i segni si alternano.

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

1) raccoglimento a fattore comune:

- Il numero dei termini può essere **qualsiasi**;
- C'è un fattore comune a tutti i termini;
- Si mette in evidenza il fattore comune, che è il M. C. D. di ciascun termine del polinomio e lo si moltiplica per il quoziente tra il polinomio dato ed il fattore comune:

$$ax+bx+cx=x(a+b+c)$$

2) raccoglimento parziale:

- Il numero dei termini deve essere **pari**;
- C'è un fattore comune a metà dei termini ed un fattore comune all'altra metà;
- La scomposizione si fa in 2 passaggi: nel primo si mettono in evidenza i fattori comuni a ciascuna metà, nel secondo passaggio si fa il raccoglimento a fattore comune dei polinomi quozienti (che devono essere uguali):

$$ax+bx+ay+by=x(a+b)+y(a+b)=(x+y)(a+b)$$

3) differenza di due quadrati:

- Il numero dei termini deve essere **due**;
- Ci sono due quadrati di segno opposto;
- Si fa la radice quadrata di ciascun quadrato e si moltiplica la somma di tali radici per la loro differenza (in pratica la scomposizione non è altro che il prodotto tra la somma delle basi per la loro differenza):

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Attenzione la somma di due quadrati non è scomponibile cioè a^2+b^2 *è irriducibile*

4) quadrato del binomio:

- Il numero dei termini deve essere **tre**;
- Ci sono due quadrati di segno positivo ed un doppio prodotto di segno opportuno;
- Si fa la radice quadrata di ciascun quadrato, si mette in mezzo il segno del doppio prodotto e si eleva tutto al quadrato (in pratica un trinomio formato dalla somma dei quadrati di due monomi e del loro doppio prodotto è uguale al quadrato della somma dei due monomi):

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

5) quadrato del trinomio:

- Il numero dei termini deve essere **sei**;
- Ci sono tre quadrati di segno positivo e tre doppi prodotti di segno o tutti positivi o due negativi ed uno positivo;
- Si fa la radice quadrata di ciascun quadrato facendo attenzione ai segni e si eleva tutto al quadrato (in pratica un polinomio formato dalla somma dei quadrati di tre monomi e del doppio prodotto di ciascun monomio per ognuno dei seguenti è uguale al quadrato del polinomio somma dei tre monomi):

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$$

$$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc=(a-b-c)^2$$

6) cubo del binomio:

- Il numero dei termini deve essere **quattro**;
- Ci devono essere due cubi e due tripli prodotti e, se il polinomio è ordinato, i gradi devono avere incremento o decremento costante e i segni devono essere o tutti uguali o due positivi e due negativi alternati;
- Si fa la radice cubica di ciascun cubo lasciando lo stesso segno di prima ed elevando tutto al cubo (in pratica un quadrinomio formato dalla somma dei cubi di due monomi e dei tripli prodotti del quadrato di ciascun monomio per l'altro monomio è uguale al cubo della somma dei due monomi):

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

7) somma o differenza tra due cubi:

- Il numero dei termini deve essere **due**;
- Ci sono due cubi dello stesso segno (in caso di somma) oppure di segno diverso (in caso di differenza);
- La scomposizione è data dal prodotto di due polinomi: il *primo* si ottiene dalle radici cubiche di ciascun cubo lasciando il segno uguale, il secondo polinomio si ottiene dal primo facendo: a) il quadrato del primo termine con segno positivo, b) il prodotto (e non il doppio prodotto) cambiato di segno del primo termine per il secondo, c) il quadrato del secondo termine con segno positivo:

$$a^3+b^3=\left(a+b\right)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$$

$$a^3-b^3=\left(a-b\right)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$$

8) trinomio di secondo grado:

- Il numero dei termini deve essere **tre**;
- Deve essere un trinomio completo di 2° grado con il primo coefficiente uguale a +1 (in caso contrario occorre effettuare prima un raccoglimento e solo in un secondo momento applicare la regola della scomposizione di un trinomio di secondo grado);
- La scomposizione è data dal prodotto di due binomi nei quali i due numeri ***a*** e ***b*** si ottengono sapendo che il coefficiente ***s*** della *x* di primo grado è la loro ***somma*** e che il termine di grado zero ***p*** (detto termine noto) è il loro ***prodotto***. Con i segni si segue la seguente regola: 1) se il prodotto è positivo allora entrambi i numeri ***a*** e ***b*** hanno il segno positivo, 2) se il prodotto è negativo allora il numero maggiore tra ***a*** e ***b*** ha il segno positivo, mentre il minore ha il segno negativo:

$$x^2+sx+p=\left(x+a\right)\cdot\left(x+b\right)$$

con $s=a+b$ e $p=a\cdot b$

se è

$$x^2+sx-p=\left(x+a\right)\cdot\left(x-b\right)$$

con $a>b$

8) regola di Ruffini:

- Il numero dei termini può essere **qualsiasi**;
- Si applica quando non è possibile fare nessuna delle precedenti scomposizioni;
- Si cerca un numero ***p*** divisore del termine noto ***d*** e del primo coefficiente ***a*** e tale che con la *regola del resto* il polinomio si annulli, allora la scomposizione è data dal prodotto di $(x-p)$ per il risultato della divisione effettuata con la *regola di Ruffini* tra il polinomio dato e $(x-p)$.

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x-p)(ex^2+fx+g)$$

RADICALI

Radicale algebrico $\sqrt[n]{a}$ (con *a* appartenente all'insieme dei numeri Reali) è ogni valore reale la cui potenza n-esima è pari ad *a*.

1) con a > 0 ed n pari il radicale algebrico assume 2 valori reali ed opposti $\sqrt{9}=\pm 3$

2) con a > 0 ed n dispari il radicale algebrico assume un valore reale positivo $\sqrt[3]{8}=2$

3) con a < 0 ed n pari il radicale algebrico non assume alcun valore reale $\sqrt[4]{-16}=$ non esiste

4) con a < 0 ed n dispari il radicale algebrico assume un valore negativo $\sqrt[3]{-27}=-3$

Radicale aritmetico $\sqrt[n]{a}$ (con *a* appartenente all'insieme dei numeri reali ≥ 0) è il numero reale non negativo la cui potenza n-esima è uguale ad *a*.

Per definizione si ha $\sqrt[n]{0}=0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ dei numeri naturali

PROPRIETA' INVARIANTIVA DEI RADICALI

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}} \quad \text{con } p \neq o \text{ e}$$

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[\frac{n}{q}]{a^{\frac{n}{q}}} \quad \text{con } q \neq o$$

OPERAZIONI CON I RADICALI ARITMETICI

Prodotto : $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ricordando che devono avere lo stesso indice

Quoziente : $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Somma algebrica di radicali (è necessario che i radicali siano simili)

1° = $a\sqrt{b} + b\sqrt{b} - c\sqrt{b} - d\sqrt{b} = (a+b-c-d)\sqrt{b}$

2° = $a\sqrt{b} + b\sqrt{b} + c\sqrt{d} + d\sqrt{d} = (a+b)\sqrt{b} + (c+d)\sqrt{d}$

Potenza

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Radice di Radice

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

TRASPORTO DI UN FATTORE FUORI DAL SEGNO DI RADICE (ARITMETICO)

$$\sqrt[n]{a^n b c^n} = ac\sqrt[n]{b}$$

TRASPORTO DI UN FATTORE ALL'INTERNO DEL SEGNO DI RADICE (ARITMETICO)

$$ac\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b c^n}$$

RADICALI DOPPI

$$1 = \sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} + \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

$$2 = \sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} - \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Perché un radicale doppio sia risolubile in 2 radicali semplici, occorre che la quantità $a^2 - b$ sia un ***quadrato perfetto***.

RAZIONALIZZAZIONE DELLE FRAZIONI

	Frazione	**Fattore razionalizzante**	**Frazione razionalizzata**
1	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$\sqrt{a}$	$\frac{\sqrt{a}}{a}$
2	$\frac{1}{a\sqrt{b}}$	$\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{b}}{ab}$
3	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$	$\sqrt[3]{a^2}$	$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}$
4	$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	$\sqrt[n]{a^{n-m}}$ con m < n	$\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$
5	$\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$	$\sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$

	Frazione	Fattore razionalizzante	Frazione razionalizzata
6	$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$	$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
7	$\frac{1}{a-\sqrt{b}}$	$a+\sqrt{b}$	$\frac{a+\sqrt{b}}{a^2-b}$
8	$\frac{1}{a+\sqrt{b}}$	$a-\sqrt{b}$	$\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$
9	$\frac{1}{\sqrt{a}+b}$	$\sqrt{a}-b$	$\frac{\sqrt{a}-b}{a-b^2}$
10	$\frac{1}{\sqrt{a}-b}$	$\sqrt{a}+b$	$\frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}$
11	$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$	$\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{c}\right)\right]$	$\frac{\left[\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+\left(\sqrt{c}\right)\right]}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-c}$
12	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$	$\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$	$\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a+b}$
13	$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$	$\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)$	$\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a-b}$