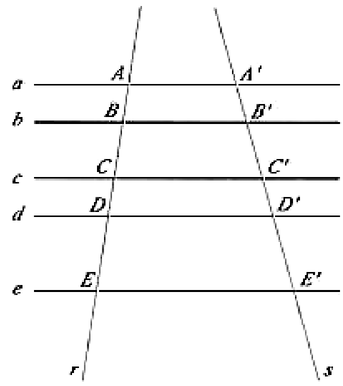
SIMILITUDINE TRA FIGURE PIANE

1 – LA CORRISPONDENZA DI TALETE

Un importante esempio di classi di grandezze direttamente proporzionali è costituito dalle classi di segmenti staccati su due trasversali da un fascio di rette parallele.



Sia *a* una retta del piano (detta *generatrice*). Si considerino la famiglia di tutte le rette parallele ad *a* (che chiameremo *fascio di rette*) e si tagli, infine, il fascio di rette con due trasversali *r* e *s* (non parallele ad *a*).
Ogni coppia di rette del fascio stacca un segmento su *r* ed uno su *s* che consideriamo fra loro corrispondenti.
La corrispondenza fra la classe dei segmenti staccati dal fascio di rette parallele sulla *r* e quella dei segmenti staccati sulla *s* viene denominata ***corrispondenza di Talete***.
In base al *piccolo teorema di Talete*, tale corrispondenza associa:

- a segmenti tra loro congruenti su *r*, segmenti tra loro congruenti su *s*;
- fa corrispondere alla somma di due segmenti su *r*, la somma dei segmenti corrispondenti su *s*.

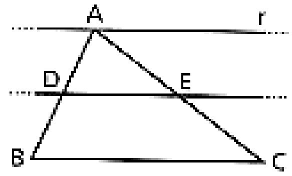
Si può dimostrare, perciò, che vale il seguente teorema.

TEOREMA DI TALETE

Se un fascio di rette parallele è intersecato da due trasversali, i segmenti (compresi fra rette parallele) che si formano sulla prima trasversale sono direttamente proporzionali ai segmenti (compresi fra le stesse rette parallele) che si formano sulla seconda trasversale.

COROLLARIO

Una retta parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati, o i loro prolungamenti, in segmenti proporzionali.



DIMOSTRAZIONE

Tracciamo per A la retta *r* parallela a DE e BC. Le rette DE, BC e *r* costituiscono un fascio di rette parallele tagliate dalle trasversali AB e AC.
Per il teorema di Talete possiamo scrivere la proporzione

$$AD : DB = AE : EC$$

#

Si può anche dimostrare l'enunciato inverso (dimostrazione omessa).

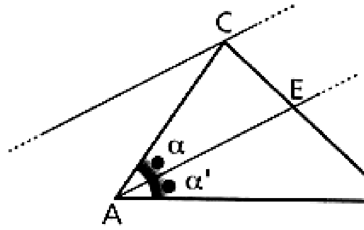
TEOREMA

Una retta che determina su due lati di un triangolo (o sui loro prolungamenti) segmenti proporzionali, è parallela al terzo lato.

In base al teorema di Talete si può dimostrare, infine il seguente importante teorema.

TEOREMA – *DELLA BISETTRICE*

In un triangolo, la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti direttamente proporzionali agli altri due lati.



caso a Indichiamo con α l'angolo $C\hat{A}E$ e con α' l'angolo $B\hat{A}E$. Disegniamo la retta per C parallela alla bisettrice AE.

DIMOSTRAZIONE

Nel triangolo DBC la retta AE, essendo parallela al lato DC, divide gli altri due lati in parti direttamente proporzionali:

$$BE : CE = AB : DA$$

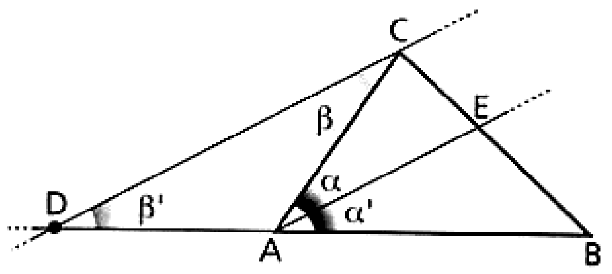
Gli angoli α e β sono alterni interni delle rette parallele AE e CD, tagliate dalla trasversale AC $\Rightarrow$ sono congruenti ($\alpha \cong \beta$).
Gli angoli α' e β' sono corrispondenti delle stesse parallele,

tagliate dalla trasversale DB ⇒ sono congruenti ($\alpha' \cong \beta'$).
Poiché $\alpha \cong \alpha'$ per ipotesi, risulta $\beta \cong \beta'$ (per la proprietà transitiva). Quindi il triangolo ADC è isoscele sulla base DC e pertanto DA ≅ AC.
Nella proporzione BE : CE = AB : DA possiamo, quindi, sostituire DA con AC, ottenendo:

BE : CE = AB : AC

ossia la bisettrice divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.

#



caso b Prolunghiamo il lato BA fino ad incontrare in D la parallela alla bisettrice. Indichiamo con β l'angolo $D\hat{C}A$ e con β' l'angolo $A\hat{D}C$.

2 – TRIANGOLI SIMILI

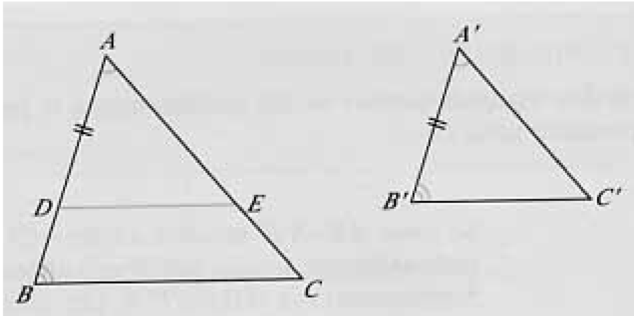
DEF: Due triangoli si dicono **simili** se e solo se hanno **i tre angoli congruenti** ed **i lati in proporzione.**

In due triangoli simili si dicono CORRISPONDENTI o OMOLOGHI i vertici degli angoli congruenti ed i lati opposti agli angoli congruenti.
Il rapporto esistente tra due lati corrispondenti si chiama RAPPORTO DI SIMILITUDINE; noi lo indicheremo con k.
Se $|k| = 1$, i due triangoli hanno i tre lati ordinatamente congruenti e sono pertanto congruenti. ⇒ *La congruenza di due triangoli è un caso particolare di similitudine.*

Si verifica facilmente che *la relazione di similitudine tra triangoli gode delle proprietà RIFLESSIVA, SIMETRICA e TRANSITIVA*.Si tratta pertanto di una particolare *relazione di equivalenza*. In tal caso il rappresentante di ciascuna classe di equivalenza è la FORMA del triangolo.

Per verificare che due triangoli sono simili non occorre verificare che siano soddisfatte tutte le condizioni precedentemente esposte; basta ricorrere ad uno dei seguenti criteri di similitudine, che ci limitiamo ad enunciare.

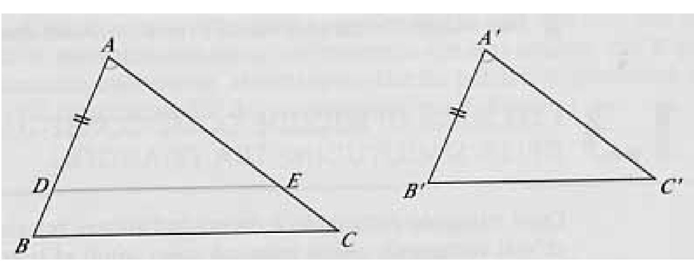
1° CRITERIO DI SIMILITUDINE
Se due triangoli hanno due angoli ordinatamente congruenti, allora sono simili.



DIMO.
Siano $\hat{A} \cong \hat{A}'$ e $\hat{B} \cong \hat{B}'$ gli angoli ordinatamente congruenti, risulta anche $\hat{C} \cong \hat{C}'$, perché supplementari di angoli congruenti.
Possiamo sovrapporre i lati A′B′ ad AB e A′C′ ad AC poiché risulta $\hat{A} \cong \hat{A}'$. Pertanto, chiamiamo D il corrispondente di B′ su AB ed E il corrispondente di C′ su AC. Risulterà DE // BC per il criterio generale di parallelismo (essendo uguali gli angoli corrispondenti). Per il Teorema di Talete, quindi, i lati dei triangoli sono in proporzione.

#

2° CRITERIO DI SIMILITUDINE
Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo tra essi compreso congruente, allora sono simili.



DIMO.
Essendo $\hat{A} \cong \hat{A}'$, possiamo sovrapporre i lati A′B′ ad AB e A′C′ ad AC. Chiamiamo D il corrispondente di B′ su AB ed E il corrispondente di C′ su AC. In virtù della proporzione AB : A′B′ = AC : A′C′ esistente tra i lati dei due triangoli, possiamo scrivere

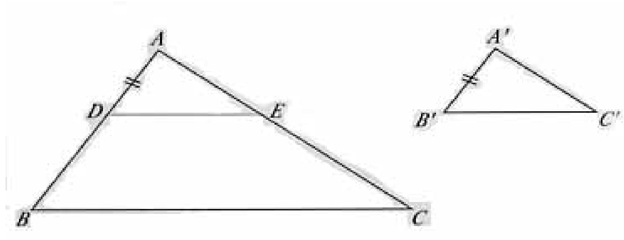
$$AB : AD = AC : AE.$$

Applicando l’inverso del Teorema di Talete, concludiamo che DE // BC. Pertanto $\hat{D} \cong \hat{B}$, perché corrispondenti nel parallelismo. Essendo anche $\hat{D} \cong \hat{B}'$, per la proprietà transitiva risulta $\hat{B} \cong \hat{B}'$ e si può, quindi, applicare il criterio precedente.

#

3° **CRITERIO DI SIMILITUDINE**

Se due triangoli hanno tre lati ordinatamente in proporzione, allora sono simili.



DIMO.

Per ipotesi:

$$AB : A'B' = AC : A'C' = BC : B'C'$$

Se fosse AB ≅ A′B′, allora sarebbe anche AC ≅ A′C′ e BC ≅ B′C′. Pertanto i due triangoli sarebbero congruenti, e quindi simili tra loro.

Supponiamo, allora che AB e A′B′ non siano congruenti; per fissare le idee, ammettiamo che AB >A′B′.

Prendiamo su AB un segmento AD ≅ A′B′; da D conduciamo la parallela al lato BC e chiamiamo E la sua intersezione con il lato AC. Per il corollario al 1° criterio di similitudine, ABC e ADE sono simili e pertanto risulta

$$AB : AD = AC : AE = BC : DE$$

Confrontando queste ultime proporzioni con quelle ammesse per ipotesi, e ricordando che, per costruzione risulta AD ≅ A′B′, concludiamo che

$$AE \cong A'C' \qquad e \qquad DE \cong B'C',$$

poiché esiste una sola grandezza quarta proporzionale dopo altre tre.

Il triangolo ADE è quindi congruente al triangolo A′B′C′ ed è, perciò, anch’esso simile ad ABC.

#

Altri corollari importanti sono:

1. *Tutti i triangoli equilateri sono simili tra loro.*
2. *Due triangoli isosceli aventi congruenti o l’angolo al vertice o gli angoli alla base sono simili.*
3. *Due triangoli rettangoli aventi un angolo acuto congruente sono simili.*
4. *Due triangoli rettangoli aventi i cateti ordinatamente in proporzione sono simili.*

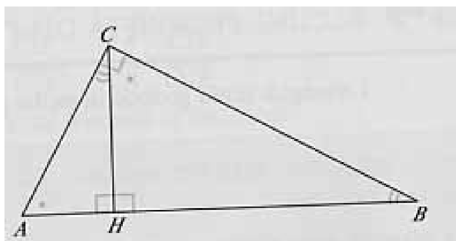
3 – I TEOREMI DI EUCLIDE COME CONSEGUENZA DELLA SIMILITUDINE TRA TRIANGOLI

Ogni triangolo rettangolo è diviso dall’altezza relativa all’ipotenusa in due triangoli, anch’essi rettangoli; questi triangoli sono simili a quello dato, in base al precedente corollario 3, ed inoltre sono simili tra loro.

Si possono, quindi, dimostrare tramite la similitudine dei triangoli i teoremi di Euclide.

1° **TEOREMA DI EUCLIDE**

In ogni triangolo rettangolo, un cateto è medio proporzionale tra l’ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull’ipotenusa.



2° **TEOREMA DI EUCLIDE**

In ogni triangolo rettangolo, l’altezza relativa all’ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull’ipotenusa.

DIMO.

Infatti, considerando i triangoli simili ABC e ACH (coroll. 3), si può scrivere la seguente proporzione tra lati omologhi:

$$AB : AC = AC : AH.$$

Facendo, poi, riferimento ai due triangoli simili ACH e CBH (coroll. 3), si può scrivere quest’altra proporzione:

AH : CH = CH : AH.

Se ne deducono, quindi, le due uguaglianze seguenti

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AH} \quad \text{e} \quad \overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

La prima esprime il fatto che il quadrato costruito su un cateto è equivalente al rettangolo avente per lati l'ipotenusa e la proiezione di quel cateto sull'ipotenusa; la seconda esprime, invece, il fatto che il quadrato costruito sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente per lati le proiezione dei cateti sull'ipotenusa.

#

4 – ALCUNE PROPRIETÀ DEI TRIANGOLI SIMILI

I triangoli simili godono di molte proprietà. Il teorema seguente ne enuncia alcune.

TEOREMA (RAPPORTO DI SIMILITUDINE)

Se due triangoli sono simili:

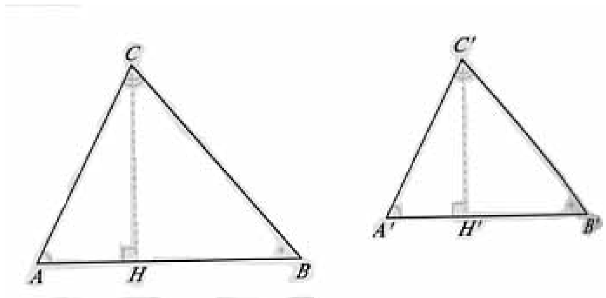
a. *due lati omologhi stanno tra loro come le rispettive altezze;*
b. *i perimetri stanno tra loro come due lati omologhi;*
c. *le misure delle aree stanno tra loro come il quadrato del rapporto di similitudine.*

DIMO.

Consideriamo i triangoli ACH e A′C′H′, entrambi rettangoli, rispettivamente, in H e H′. Essi hanno un angolo acuto congruente ($\hat{A} \cong \hat{A}'$, dalla similitudine dei triangoli ABC e A′B′C′). Pertanto sono simili tra loro e quindi:

AC : A′C′ = CH : C′H′ ,

e, poichè il rapporto tra lati omologhi è costante, risulta dimostrata la prima parte del teorema.



Dalla similitudine dei triangoli ABC e A′B′C′, risulta che:

AB = *k* A′B′ AC = *k* A′C′ BC = *k* B′C′.

Pertanto risulta:

2*p* = AB + BC + AC = *k* A′B′ + *k* A′C′ + *k* B′C′ = *k* (A′B′ + A′C′ + B′C′) = *k* 2*p*′

e quindi risulta dimostrata pure la seconda parte dell'enunciato.

Quanto alla terza ed ultima parte, si procede in modo analogo alla seconda, ricordando quanto affermato nella prima.

#

5 – POLIGONI SIMILI

DEF: Due poligoni si dicono **simili** se hanno ordinatamente **gli angoli congruenti** ed **i lati in proporzione**.

In due poligoni simili si dicono CORRISPONDENTI o OMOLOGHI i vertici degli angoli congruenti ed i lati opposti agli angoli congruenti; si dicono, infine, OMOLOGHE le diagonali che congiungono vertici omologhi.

Anche in questo caso, chiameremo RAPPORTO DI SIMILITUDINE il rapporto *k* esistente tra due lati corrispondenti. Se |*k*| = 1, i due triangoli hanno i tre lati ordinatamente congruenti e sono pertanto congruenti.

La similitudine tra poligoni gode di diverse proprietà, alcune delle quali sono analoghe a quelle valide per i triangoli. Ci limitiamo a riportarne alcune.

PROPRIETÀ DELLA SIMILITUDINE TRA I POLIGONI

a. *La relazione di similitudine tra i poligoni gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.* Si tratta, perciò, di una RELAZIONE DI EQUIVALENZA.
b. *Se da due vertici omologhi di due poligoni simili si tracciano tutte le possibili diagonali, i poligoni restano divisi nello stesso numero di triangoli, ordinatamente simili.*

c. *In due poligoni simili, il rapporto tra le diagonali corrispondenti è uguale al rapporto di similitudine.*
d. *I perimetri di due poligoni simili stanno tra loro nel rapporto di similitudine.*
e. *Le misure delle aree di due poligoni simili stanno tra loro come il quadrato del rapporto di similitudine.*
f. *Poligoni regolari aventi lo stesso numero di lati sono simili; inoltre i loro lati e i loro perimetri stanno tra loro come i raggi delle circonferenze inscritte e come quelli delle circonferenze circoscritte.*
g. *Cerchi di raggio diverso sono simili tra loro; il loro rapporto di similitudine è uguale al rapporto tra i raggi.*

6 – CONCETTO DI SIMILITUDINE IN GENERALE

Da un punto di vista intuitivo, l'osservazione ci porta a constatare che poligoni simili hanno la stessa *forma*, ma non la stessa estensione. Per esempio, siamo soliti dire che la pianta stradale di una città riproduce la forma della struttura della città, o che la fotocopia di un disegno riproduce la forma di ciò che nel disegno è rappresentato, e così via.
In ciascuno di questi casi si parla, in termini intuitivi, di figure ***simili***, concetto che può essere reso in termini più rigorosi con la seguente definizione di similitudine.

DEF: *Due figure si dicono* ***simili*** *se tra i loro punti si può stabilire una corrispondenza biunivoca in modo che l'insieme dei segmenti determinati dalle coppie di punti dell'una risulti proporzionale all'insieme dei segmenti determinati dalle coppie di punti corrispondenti dell'altra.*

In analogia con quanto stabilito relativamente alla similitudine tra triangoli e poligoni, se A e B sono due punti di una figura e A′ e B′ sono i corrispondenti punti dell'altra, il rapporto $k = \frac{AB}{A'B'}$ viene chiamato ***rapporto di similitudine*** o ***fattore di scala***.

In pratica il concetto di similitudine si applica molto spesso nella riproduzione di disegni riguardanti costruzioni e impianti civili o industriali, circuiti elettrici ed elettronici, nella compilazione di mappe e carte stradali. In ciascuno di questi casi, se il rapporto di similitudine è uguale all'unità, il disegno riproduce fedelmente la forma dell'oggetto con le sue dimensioni reali (*a grandezza naturale*), se è maggiore di 1 ne è un *ingrandimento*, se è minore di 1 ne è una *riduzione*.