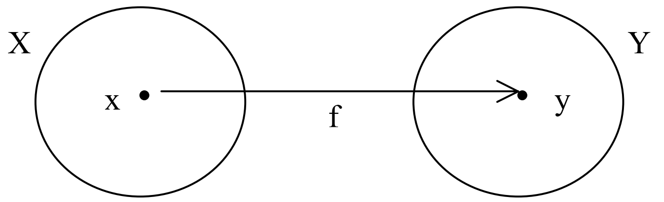
Funzioni

1. Definizione di funzione

Siano X e Y due insiemi. Una **funzione** f definita in X a valori in Y è una corrispondenza che associa ad ogni elemento $x \in X$ al più un elemento $y \in Y$



Dominio dom f = insieme degli $x \in X$ a cui f associa un elemento $y \in Y$.
Il dominio si chiama anche **campo di esistenza** o **insieme di definizione**.
Codominio = Y
Il dominio di f è in generale un sottoinsieme di X.
Si scrive

$$f : \text{dom } f \subseteq X \to Y$$

se dom f = X, si dice che f è definita su X e si scrive semplicemente $f : X \to Y$
L'elemento $y \in Y$ associato a un elemento $x \in$ dom f si chiama **immagine di x** attraverso f e si indica

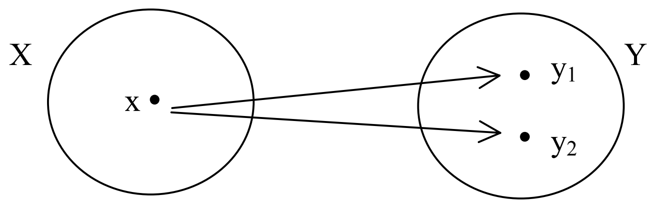
$y = f(x)$ (x = variabile indipendente, y = variabile dipendente)

L'insieme degli $y \in Y$ tali che $y = f(x)$ si chiama **immagine di f** e si indica con **im f**.
im f è un sottoinsieme del codominio Y.
Dato un elemento $y \in Y$, l'insieme degli $x \in \text{dom } f$ tali che $f(x) = y$ si chiama controimmagine di x attraverso f e si indica con $f^{-1}(y)$.
In formule:

dominio $\quad \text{dom } f = \{x \in X : \exists y \in Y \wedge y = f(x)\} \subseteq X$
immagine $\quad \text{im } f = \{y \in Y : \exists x \in X \wedge y = f(x)\} \subseteq Y$
controimmagine di y $\quad f^{-1}(y) = \{x \in X : y = f(x)\} \subseteq X$

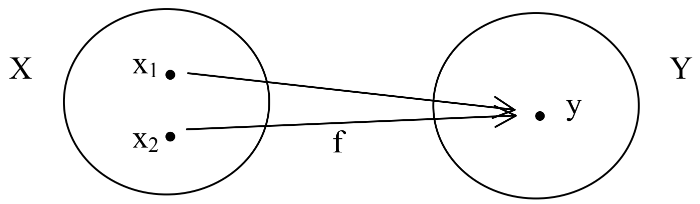
Il **grafico di f** è l'insieme delle coppie ordinate (x,f(x)) al variare di x nel dominio di f.

Attenzione: nella definizione si richiede che ad ogni $x \in X$ sia associato al più un $y \in Y$: non ne possono essere associati due o più!



questa non è una funzione!

Invece è possibile che due x diverse abbiano la stessa immagine y



questa è una funzione.

Il caso che consideriamo nelle nostre lezioni è quello in cui la funzione opera fra insiemi di numeri reali: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

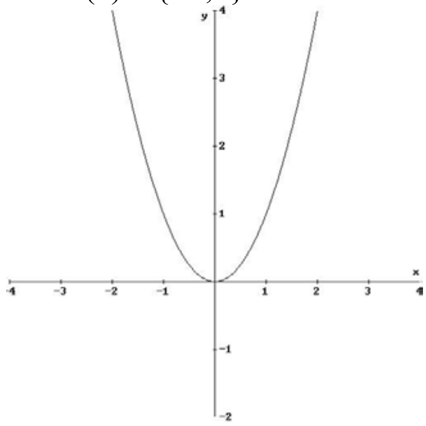
$Y = \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ funzione reale (la variabile dipendente y assume valori reali)

$X = \mathbf{R}$ $\Rightarrow$ funzione di variabile reale (la variabile indipendente x assume valori reali)

<u>Esempi</u>

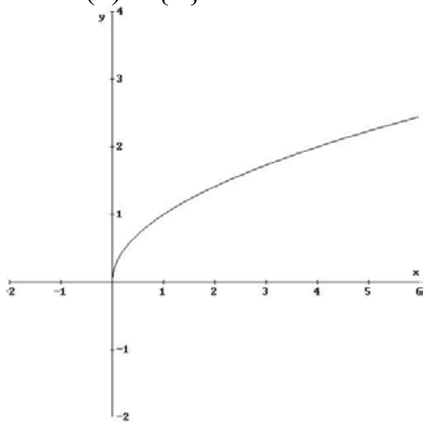
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = x^2$ (parabola)

dominio di f	dom f = **R**	codominio	R
immagine di f	im f = $[0,+\infty)$		
controimmagine di y = 4	$f^{-1}(4) = \{-2,2\}$		



$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$

dominio di f	dom f = $[0,+\infty)$	codominio	R
immagine di f	im f = $[0,+\infty)$		
controimmagine di y = 9	$f^{-1}(4) = \{9\}$		



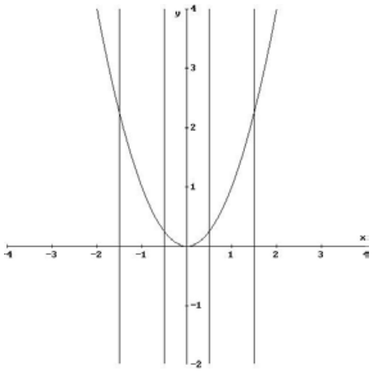
NB: il dominio si legge sull'asse x, l'immagine (e il codominio) sull'asse y.

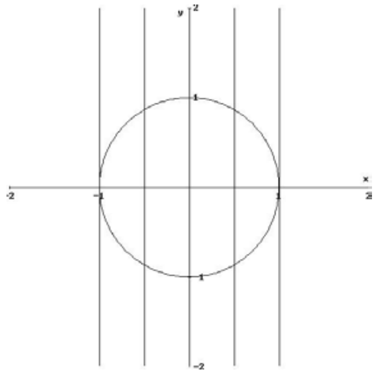
Per stabilire se una corrispondenza è una funzione si può usare il test della retta verticale: una curva è il grafico di una funzione $\Leftrightarrow$ <u>ogni</u> retta verticale taglia il grafico al più una volta.

<u>Esempi</u>

$f(x) = x^2$ (parabola, è una funzione)

$x^2 + y^2 = 1$ (circonferenza, non è una funzione)

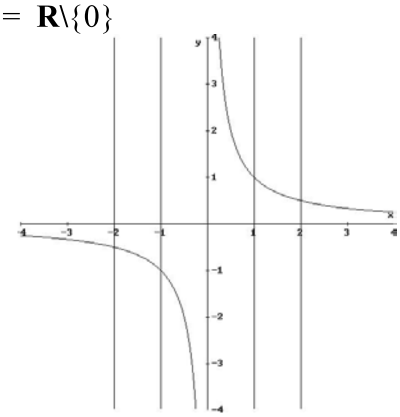




$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \quad f(x) = \dfrac{1}{x}$ (iperbole equilatera, è una funzione)

dominio di f   dom f = $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

immagine di f   im f = $\mathbf{R} \setminus \{0\}$

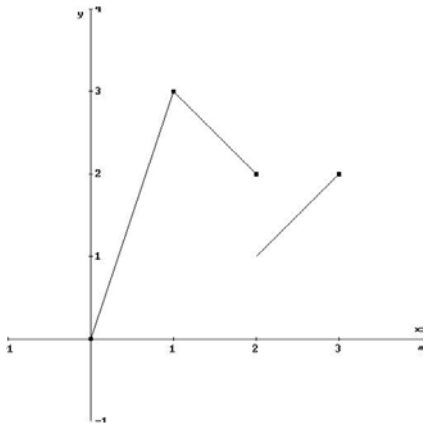


FUNZIONI DEFINITE A TRATTI

Le funzioni definite a tratti sono definite con espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio.

<u>Esempi</u>

$$f = [0,3] \to \mathbf{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 3x & 0 \le x \le 1 \\ 4 - x & 1 < x \le 2 \\ x - 1 & 2 < x \le 3 \end{cases} \qquad \text{dom } f = [0,3] \qquad \text{im } f = [0,3]$$

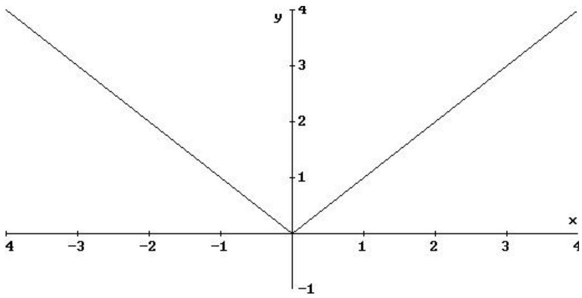


Le seguenti sono funzioni definite a tratti particolarmente significative.

Valore assoluto

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

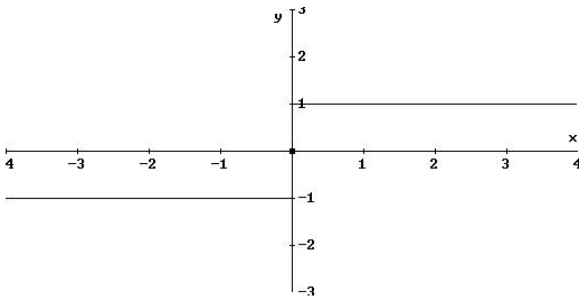
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \ge 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Segno

f : **R** → **R**

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Parte intera

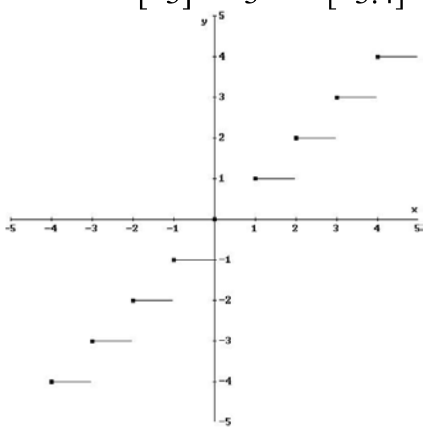
Parte intera di un numero reale x é il più grande intero relativo minore o uguale a x.

f : **R** → **Z**

f(x) =[x]

Alcuni valori esemplificativi:

[4] = 4 [4.6] = 4 [–3] = –3 [–3.4] = –4



Mantissa

Mantissa di un numero reale x é la differenza fra il numero x e la sua parte intera

f : **R** → **R**

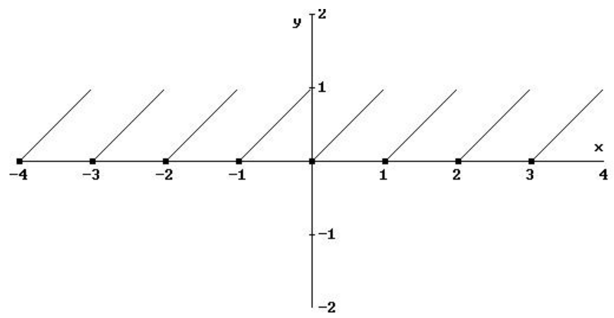
f(x) = M(x) = x – [x]

Alcuni valori esemplificativi:

x = 0.9 M(x) = 0.9 – 0 = 0.9

x = 1.2 M(x) = 1.2 – 1 = 0.2

x = –3.4 M(x) = –3.4 –(–4) = 0.6



2. Funzione limitata, massimo, minimo

Data la funzione $f : X \to Y$, sia $X = \text{dom } f$; l'insieme im f delle immagini di tutti gli elementi $x \in X$ si può sinteticamente scrivere come

$$\text{im } f = f(X) = \{f(x) \in Y : \forall x \in X\}$$

Definizioni

La funzione **f** è **superiormente limitata** nel suo dominio se l'insieme delle immagini f(X) è superiormente limitato, ossia possiede dei maggioranti; in tal caso l'**estremo superiore di f** è il più piccolo dei maggioranti di f(X)

$$\sup_{x \in X} f(x) = \sup f(X)$$

Indicando con M l'estremo superiore di f

$$M = \sup_{x \in X} f(x)$$

se esiste $x_M \in \text{dom } f$ tale che $M = f(x_M)$, allora M si chiama **massimo globale** o **assoluto** di f, e x_M **punto di massimo globale** o **assoluto** di f [1].

Se f(X) non ha maggioranti, si scrive

$$\sup_{x \in X} f(x) = +\infty$$

e **f** si dice **illimitata superiormente**.

La funzione **f** è **inferiormente limitata** nel suo dominio se l'insieme delle immagini f(X) è inferiormente limitato, ossia possiede dei minoranti; in tal caso l'**estremo inferiore di f** è il più grande dei minoranti di f(X)

$$\inf_{x \in X} f(x) = \inf f(X)$$

Indicando con m l'estremo inferiore di f

$$m = \inf_{x \in X} f(x)$$

se esiste $x_m \in \text{dom } f$ tale che $m = f(x_m)$, allora m si chiama **minimo globale** o **assoluto** di f, e x_m **punto di minimo globale** o **assoluto** di f [1].

Se f(X) non ha minoranti, si scrive

$$\inf_{x \in X} f(x) = -\infty$$

e **f** si dice **illimitata inferiormente**.

---

[1] NB : Il massimo M (il minimo m) è un valore assunto dalla funzione e si legge sull'asse y, mentre x_M (xm) si legge sull'asse x.

f si dice **limitata** se è limitata sia inferiormente che superiormente, ossia se f(X) è un insieme limitato sia inferiormente che superiormente.

Le **proprietà caratteristiche del massimo M** sono:
1. $\forall x \in X,\ f(x) \leq M$
2. $\exists x_M \in X : f(x_M) = M$

Le **proprietà caratteristiche del minimo m** sono:
1. $\forall x \in X,\ f(x) \geq m$
2. $\exists x_m \in X : f(x_m) = m$

Il massimo e il minimo, se esistono, sono unici; invece i punti di massimo e di minimo possono essere più di uno (vedere esempio seguente).

Esempi

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = x^2 + 1$

dom f = **R** im f = $[1,+\infty)$

L'immagine $[1,+\infty)$ è limitata inferiormente , ma non superiormente

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1$$

Il valore m = 1 viene assunto dalla funzione nel punto $x_m = 0$, quindi f ha minimo assoluto; invece l'immagine $[1,+\infty)$ è illimitata superiormente, quindi la funzione è illimitata superiormente

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$$

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = M(x)$ mantissa

dom f = **R** im f = $[0,1)$

f è limitata inferiormente e superiormente:

$\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 0$ è anche minimo assoluto (ad es. f(2)=M(2)=0)

NB : ci sono infiniti altri punti in cui la funzione assume il valore 0, ma il minimo è unico e vale sempre 0.

$\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 1$ f non ha massimo (la funzione mantissa non assume mai il valore 1)

3. Funzioni suriettive e iniettive

Definizione

Sia data la funzione $f : X \to Y$. f si dice **suriettiva** se im f = Y, ossia se ogni elemento di Y è immagine di almeno un elemento di X.

Esempi

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = 2x$

f è suriettiva: infatti im f = **R**

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = x^2$

f non è suriettiva: infatti im f = $[0,+\infty) \subset \mathbf{R}$.

Una funzione può sempre essere resa suriettiva: basta far coincidere il codominio con l'immagine di f.

Definizione
Sia data la funzione $f : X \to Y$. f è **iniettiva** se elementi diversi del dominio hanno immagini diverse:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Esempi

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = 2x$

f è iniettiva: infatti

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = 2x_1 \neq f(x_2) = 2x_2$$

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = x^2$

f non è iniettiva: infatti

$$x_1 = -2 \neq x_2 = 2 \Rightarrow f(x_1) = 4 = f(x_2) = 4$$

(due elementi diversi hanno la stessa immagine)

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = |x|$

f non è suriettiva perchè im $f = [0,+\infty) \subset \mathbf{R}$; si può renderla suriettiva assumendo l'immagine come codominio, ossia $f : \mathbf{R} \to [0,+\infty)$.
f non è iniettiva: infatti per ogni $a > 0$, si ha

$$x_1 = -a \neq x_2 = a \Rightarrow f(x_1) = |-a| = a = f(x_2) = |a| = a$$

Se f è sia iniettiva che suriettiva si dice che f è una **funzione biiettiva** di X in Y; in tal caso si dice anche che fra X e Y c'è una **corrispondenza biunivoca**.
Esempio

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$f(x) = 2x$

f è biiettiva.

$f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$
$f(x) = x^2$

f è biiettiva.

4. Funzione inversa

Se f è iniettiva, si può associare a ogni y dell'immagine l'unico elemento x del dominio tale che $f(x)=y$ (cioè si associa la controimmagine di y).
Si determina così una funzione, detta **funzione inversa di f**, definita in Y e a valori in X, indicata con $\mathbf{f}^{-1}$

$f^{-1} : Y \to X$
$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$

Si noti che

dom f^{-1} = im f
im f^{-1} = dom f

Esempi

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = 2x$

f è iniettiva; da

$$y = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$$

Poichè è consuetudine indicare con x la variabile indipendente e con y quella dipendente, si può scrivere la funzione inversa nella forma

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

(è solo un cambiamento di notazione !). In questo modo si può disegnare il grafico di f e quello della sua inversa f^{-1} sullo stesso grafico.

Il grafico della funzione f^{-1} può essere ottenuto da quello di f scambiando fra loro le componenti di ciascuna coppia (x,f(x)); ciò equivale a tracciare il grafico per simmetria rispetto alla bisettrice y=x.

Esempio

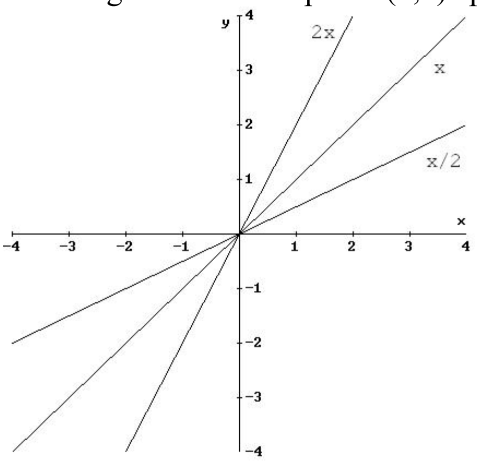
$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = 2x$

$f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$$

Ad esempio il punto (1,2) appartiene al grafico di f e il punto (2,1) appartiene al grafico di f^{-1}



Esempio

$f : \mathbf{R} \to [0,+\infty)$

$f(x) = x^2$

f è suriettiva ma non è iniettiva; considero una **restrizione** (ossia prendo un sottoinsieme del dominio)

$f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

$f(x) = x^2$

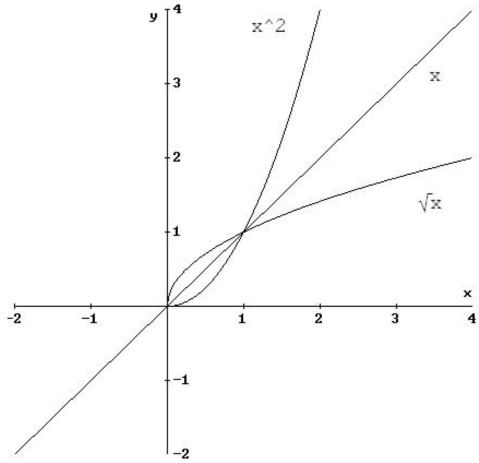
in questo modo la funzione diventa iniettiva e quindi possiede inversa.

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{y}$$

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

scambio il nome delle variabili

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$



Esempio

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$f(x) = x^3$

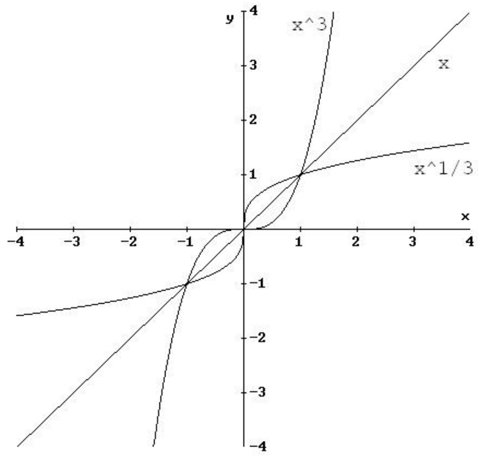
f è suriettiva e iniettiva, quindi possiede inversa

$y = x^3 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{y}$

$x = f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

scambio il nome delle variabili

$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



5. Funzioni monotone

Vogliamo descrivere il legame (se esiste) tra crescita della variabile indipendente x e crescita/diminuzione della variabile dipendente y.

Sia data la funzione $f : X \to Y$ e $A \subseteq X$ sia un sottoinsieme di X.

Definizioni

Si dice che f è una **funzione monotona crescente** su A se

$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$

f si dice **strettamente crescente** su A se

$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Si dice che f è una **funzione monotona decrescente** su A se

$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

f si dice **strettamente decrescente** su A se

$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

<u>Esempi</u> (vedere i grafici delle funzioni nelle pagine precedenti)

$f(x) = 2x$ f strettamente crescente su **R**

$f(x) = |x|$

f strettamente crescente su $[0,+\infty)$

$\forall x_1, x_2 \in [0,+\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = |x_1| = x_1 < f(x_2) = |x_2| = x_2$

f strettamente decrescente su $(-\infty,0]$

$\forall x_1, x_2 \in (-\infty,0], x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = |x_1| = -x_1 > f(x_2) = |x_2| = -x_2$

$f(x) = [x]$ parte intera

f è monotona crescente, ma non strettamente, su **R**

$f(x) = M(x)$ mantissa

f non è monotona (né crescente né decrescente) su **R**; f è strettamente crescente su ogni intervallo del tipo $[n,n+1)$ con $n\in$**Z**, ma non sull'intervallo chiuso $[n,n+1]$.

Esaminiamo il legame fra monotonia e funzione inversa.

Teorema. Se f è strettamente monotona sul suo dominio, allora f è iniettiva.

Dimostrazione.

Ipotesi: $f : X \to Y$ strettamente monotona (supponiamo per esempio crescente), ossia

$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Tesi: f iniettiva, ossia

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Se $x_1 \neq x_2$, allora sarà $x_1 < x_2$ oppure $x_2 < x_1$;

se è $x_1 < x_2$ allora dall'ipotesi segue $f(x_1) < f(x_2)$; se invece è $x_2 < x_1$ allora segue $f(x_2) < f(x_1)$; in ogni caso $f(x_1) \neq f(x_2)$, quindi f è iniettiva.

Se f è iniettiva, allora esiste la sua inversa f^{-1} e si può ulteriormente dimostrare che anche f^{-1} è monotona strettamente dello stesso tipo di f, crescente o decrescente.

<u>Esempio</u>

$f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$

$f(x) = x^2$

f è strettamente crescente, quindi iniettiva (come abbiamo già in precedenza visto) e la sua inversa $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ è ancora strettamente crescente.

La proposizione inversa di quella dimostrata nel teorema:

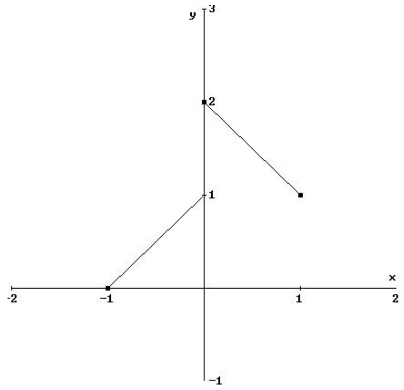
f iniettiva $\Rightarrow$ f strettamente monotona

non è vera! Per verificarlo basta un **controesempio**:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \le x < 0 \\ 2-x & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

dom $f = [-1,1]$

f è iniettiva, ma non strettamente monotona nel suo dominio.



6. Funzioni pari e dispari

Sia $f : X \to Y$ e il dominio di f sia simmetrico rispetto all'origine, ossia se $x \in \text{dom } f$, anche $-x \in \text{dom } f$.
La funzione f è **pari** se

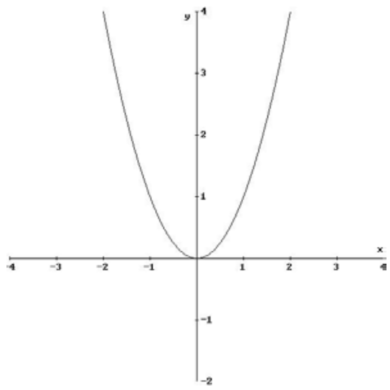
$$\forall x \in \text{dom } f,\ f(-x) = f(x)$$

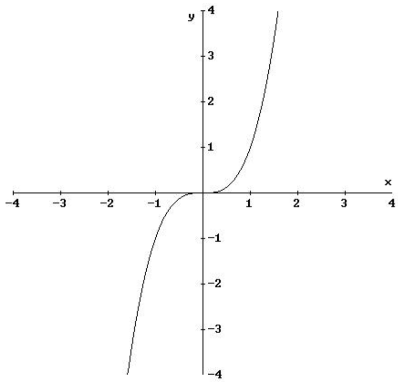
ed è **dispari** se

$$\forall x \in \text{dom } f,\ f(-x) = -f(x)$$

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; quello di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.
Attenzione: una funzione può essere nè pari nè dispari!
Esempi

$f(x) = x^2$ f pari
$f(x) = x^3$ f dispari





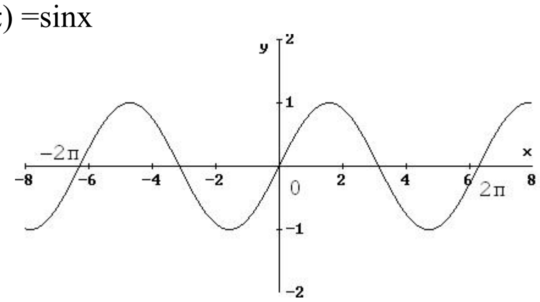
7. Funzioni periodiche

Sia $f : X \to Y$; la funzione f si dice **periodica** di periodo $P > 0$ se

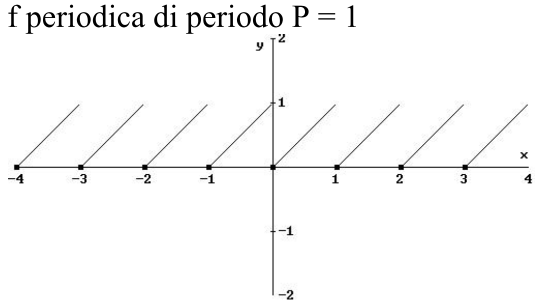
$$f(x + P) = f(x)$$

Il grafico si ripete uguale in intervalli di ampiezza uguale al periodo.
Esempi

$f(x) = \sin x$ f periodica di periodo $P = 2\pi$
$\forall x \in \mathbf{R}$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$



$f(x) = M(x)$ f periodica di periodo $P = 1$

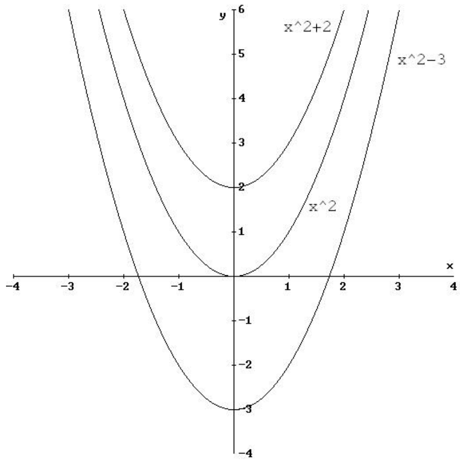


8. Grafici di funzioni ottenibili per traslazione e riflessione

A partire dal grafico della funzione f(x) si possono ottenere i grafici di altre funzioni con operazioni di traslazione orizzontale o verticale, riflessione rispetto all'asse x o y.
Elenchiamo sinteticamente i casi più comuni e le operazioni da effettuare per ottenere i nuovi grafici a partire da quello di f(x).
Sia data una funzione $y = f(x)$ di cui è noto il grafico e una costante $c > 0$.

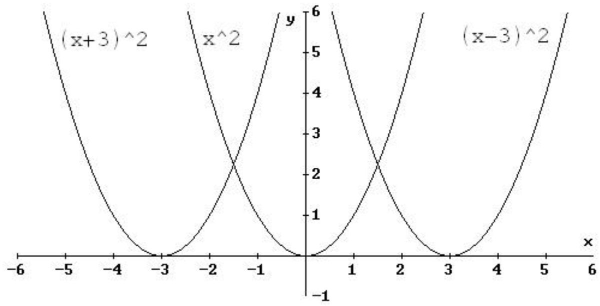
1. $y = f(x) + c$ **traslare verticalmente verso l'alto** di c unità.
2. $y = f(x) - c$ **traslare verticalmente verso il basso** di c unità.

$y = x^2$
$y = x^2 + 2$
$y = x^2 - 3$



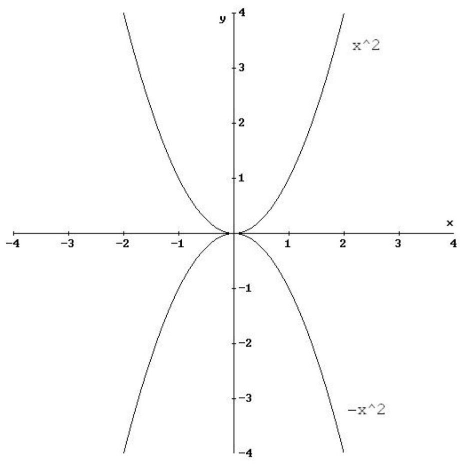
3. $y = f(x+c)$ **traslare orizzontalmente verso sinistra** di c unità
4. $y = f(x-c)$ **traslare orizzontalmente verso destra** di c unità

$y = x^2$
$y = (x + 3)^2$
$y = (x - 3)^2$

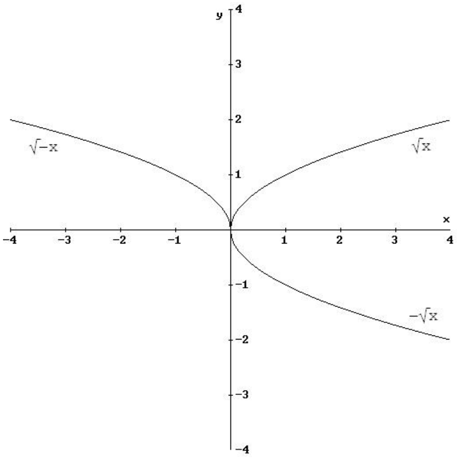


5. $y = -f(x)$ grafico **simmetrico rispetto all'asse x**
6. $y = f(-x)$ grafico **simmetrico rispetto all'asse y**

$y = x^2$
$y = -x^2$



$y = \sqrt{x}$
$y = -\sqrt{x}$
$y = \sqrt{-x}$



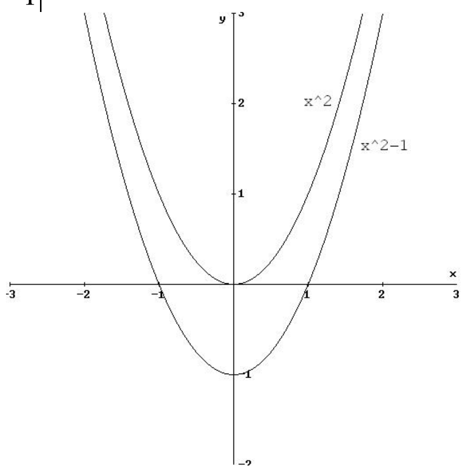
7. $y = |f(x)|$ ribaltare rispetto all'asse x i rami di curva di ordinata negativa

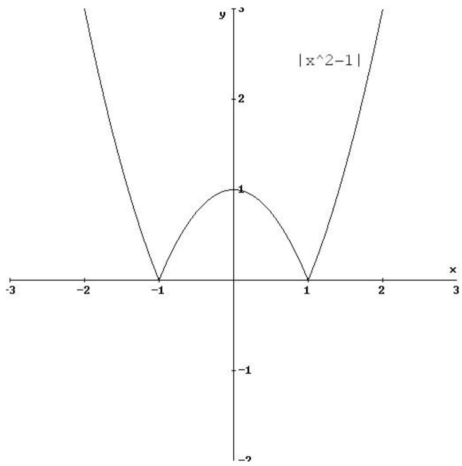
Infatti:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \forall x : f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \forall x : f(x) < 0 \end{cases}$$

<u>Esempio</u>

$y = |x^2 - 1|$

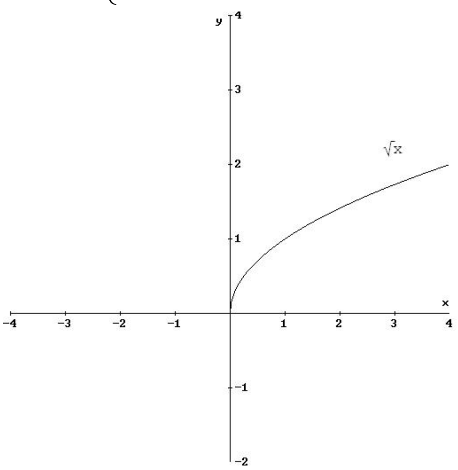


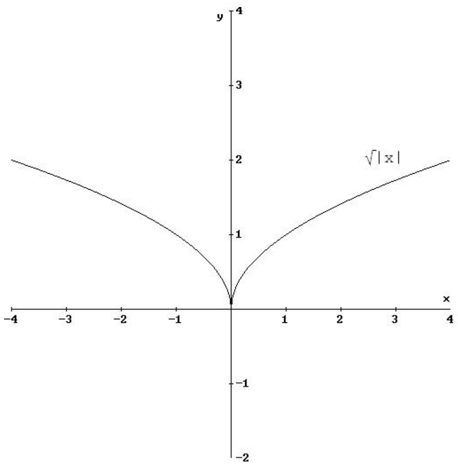


8. $$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \forall x \geq 0 \\ f(-x) & \forall x < 0 \end{cases}$$

<u>Esempio</u>

$$y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

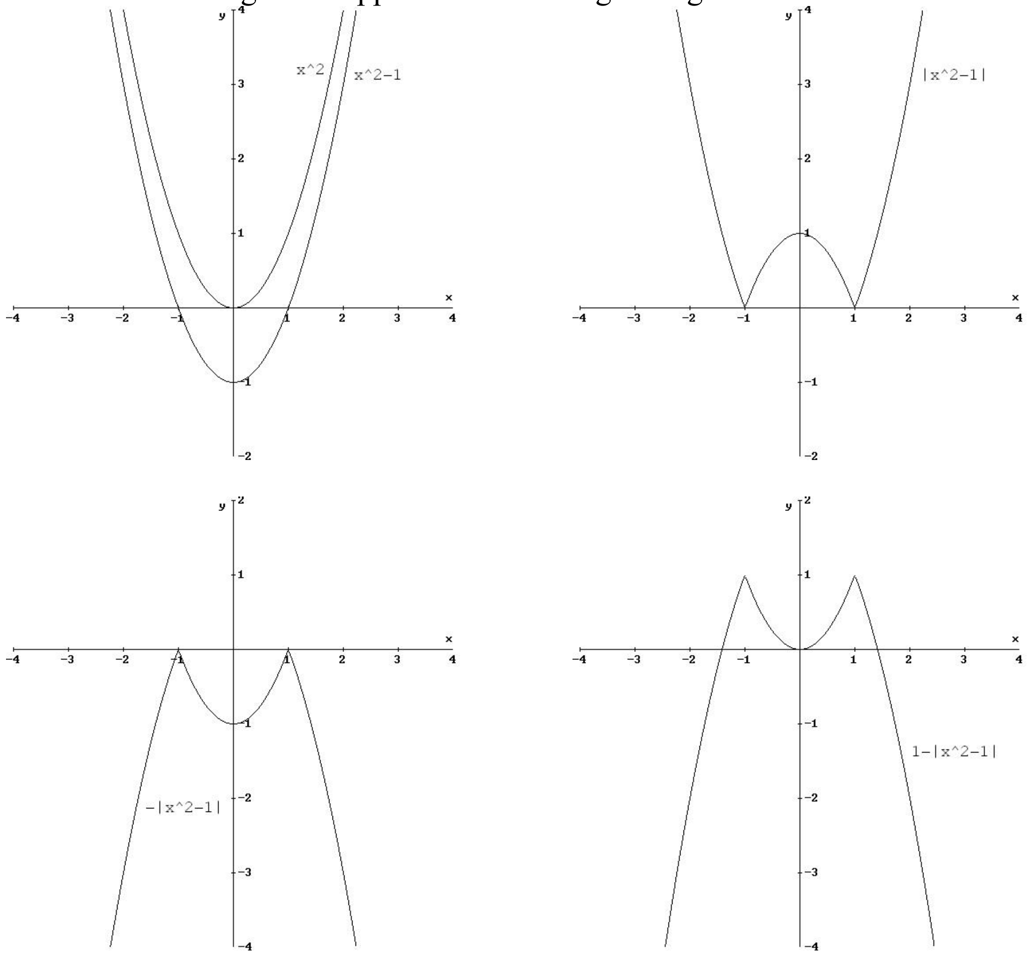




Altri esempi

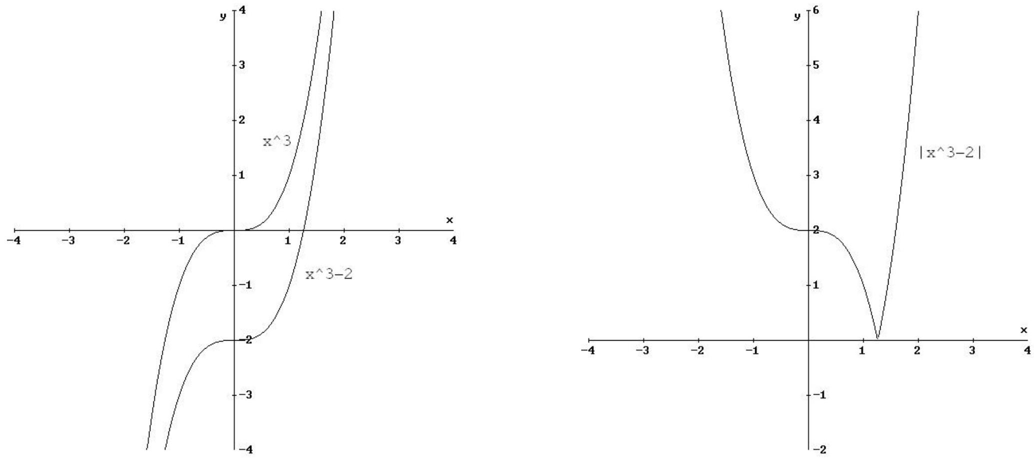
$y = 1 - |x^2 - 1|$

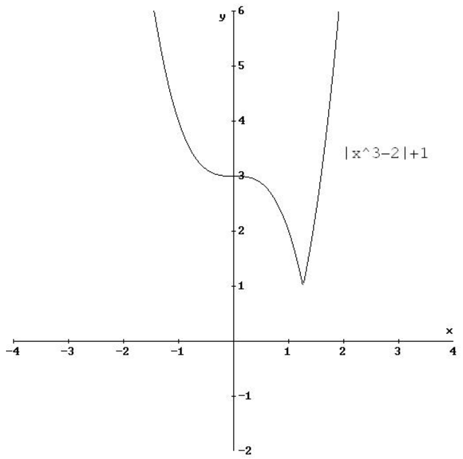
Tracciare successivamente i grafici rappresentati nelle figure seguenti :



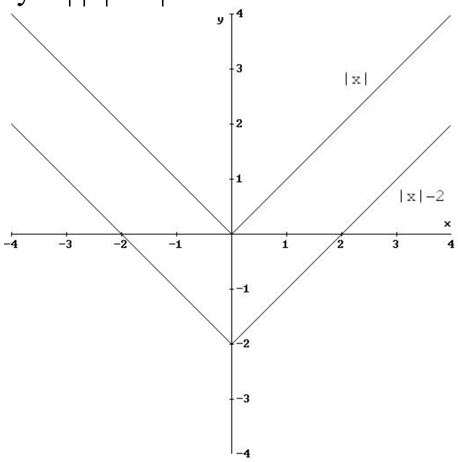
$y = |x^3 - 2| + 1$

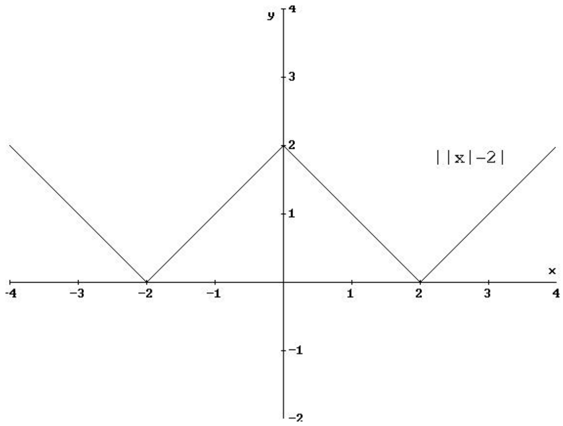
Tracciare successivamente i grafici rappresentati nelle figure seguenti





$y = ||x| - 2|$

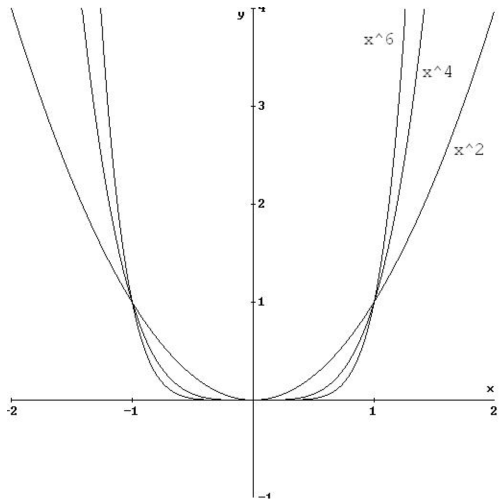




Funzioni elementari

1. Potenze intere

$f(x) = x^n \qquad n \in \mathbf{N}$



Per n pari:

dom f = **R** $\qquad$ im f = $[0,+\infty)$

f strettamente decrescente su $(-\infty,0]$

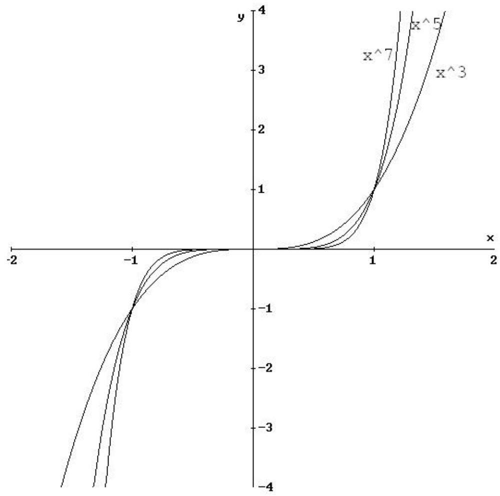
f strettamente crescente su $[0,+\infty)$

f pari

f illimitata superiormente $\qquad \sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) = +\infty$

f limitata inferiormente

minimo $m = 0$; punto di minimo $x_m = 0$



Per n dispari:

dom f = **R** $\qquad$ im f = **R**

f strettamente decrescente su **R**

f dispari

f non limitata $\qquad \sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) = +\infty$

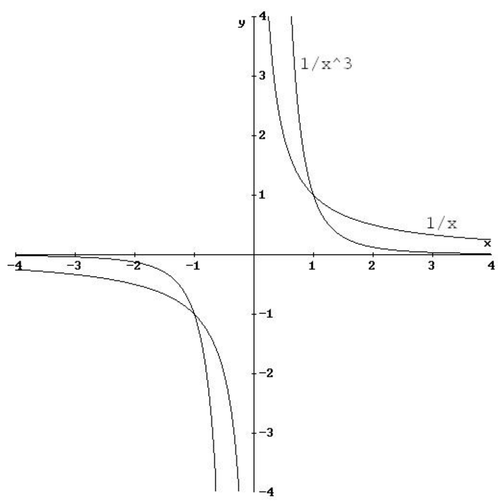
$\inf_{x\in\mathbf{R}} f(x) = -\infty$

f iniettiva e suriettiva,

quindi esiste l'inversa $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

2. Potenze con esponente intero negativo

$f(x) = x^{-n} \qquad n \in \mathbf{N}$



Per n dispari: ad esempio

$f(x) = \dfrac{1}{x}$

dom f = $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ $\qquad$ im f = $\mathbf{R}\setminus\{0\}$

f non limitata

$\sup_{x\in\mathbf{R}} f(x) = +\infty \qquad \inf_{x\in\mathbf{R}} f(x) = -\infty$

f strettamente decrescente su $[-\infty,0)$

f strettamente decrescente su $(0,+\infty)$

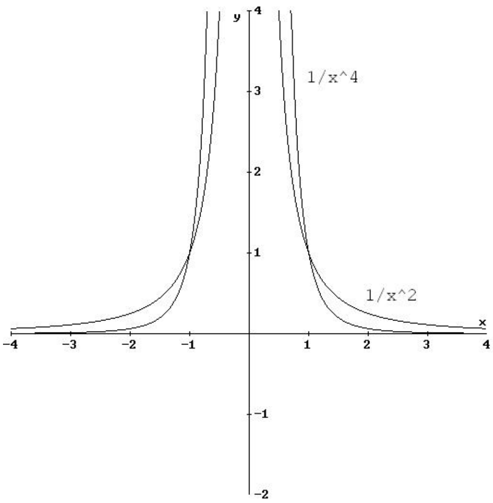
(ma non nell'unione dei due intervalli!!)

f dispari

Comportamento analogo per ogni altro n dispari

Per n pari: ad esempio

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



dom f = $\mathbf{R}\backslash\{0\}$ im f = $(0,+\infty)$

f limitata inferiormente $\inf_{x\in\mathbf{R}\backslash\{0\}} f(x) = 0$

f non ha minimo

f non limitata superiormente

$\sup_{x\in\mathbf{R}\backslash\{0\}} f(x) = +\infty$

f strettamente crescente su $(-\infty,0)$

f strettamente decrescente su $(0,+\infty)$

f pari

Comportamento analogo per ogni altro n pari

3. Radice n-esima

$$y = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

E' la funzione inversa della potenza x^n

Per n dispari: ad esempio

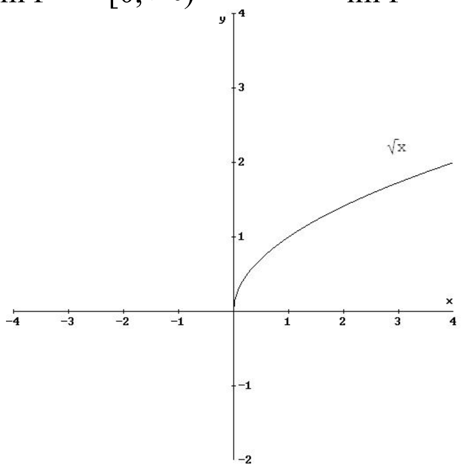
$y = x^3$ è iniettiva su **R**, quindi possiede inversa $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

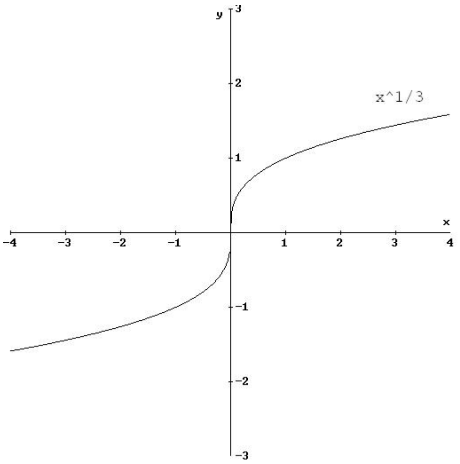
dom $f^{-1} = \mathbf{R}$ im $f^{-1} = \mathbf{R}$

Per n pari: ad esempio

$y = x^2$ non è iniettiva su **R**; si considera la restrizione a $[0,+\infty)$ e l'inversa è $y = \sqrt{x}$

dom $f^{-1} = [0,+\infty)$ im $f^{-1} = [0,+\infty)$





Si può generalizzare al caso di un esponente razionale

$$y = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^m\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad n,m\in N\backslash\{0\}$$

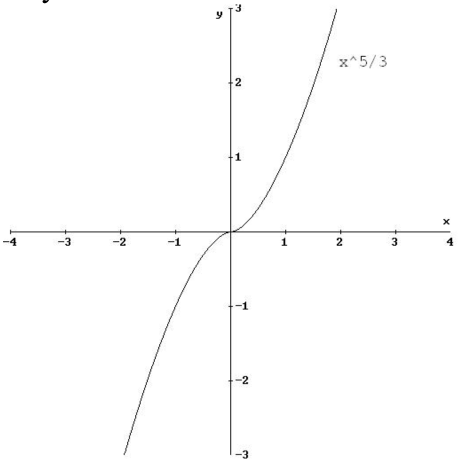
Per n dispari: dom f = **R**

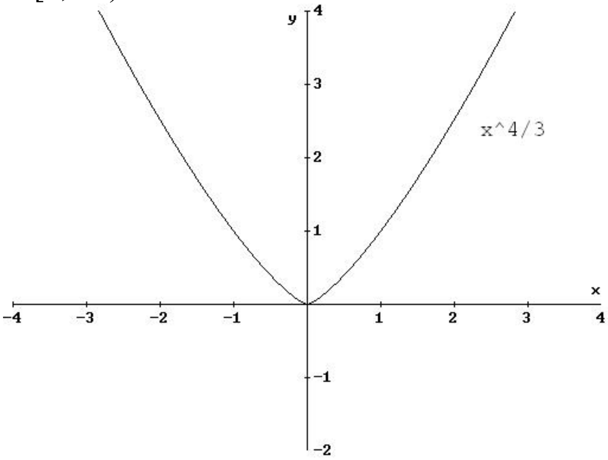
per n pari: dom f = $[0,+\infty)$

Esempi

$y = x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5}$ dom f = **R** im f = **R**

$y = x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4}$ dom f = **R** im f = $[0,+\infty)$





4. Funzione esponenziale

$y = a^x$ $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$

dom f = **R** im f = $(0,+\infty)$

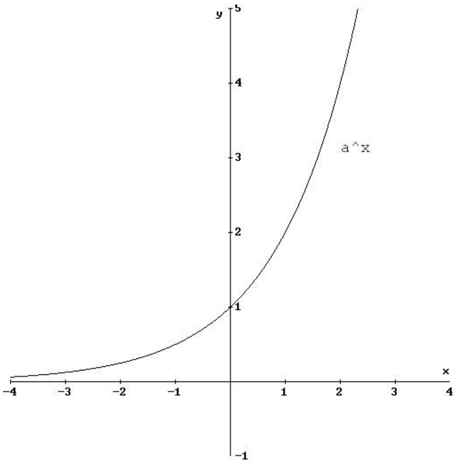
1° caso $a > 1$

f strettamente crescente su **R**

f limitata inferiormente: $\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 0$

f non ha minimo (non assume mai il valore y = 0)

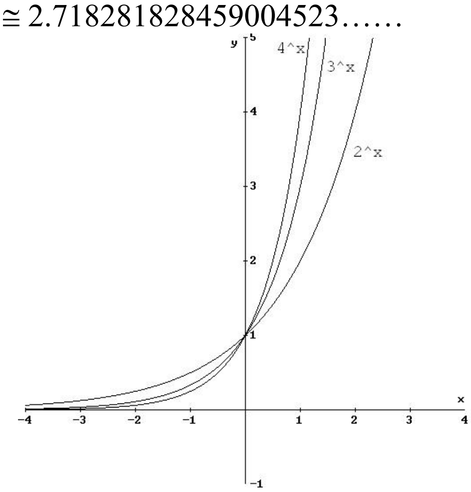
f non limitata superiormente: $\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$

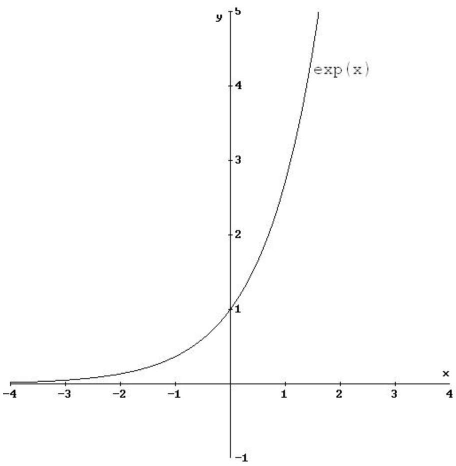


Quanto più la base a è grande, tanto più la funzione cresce rapidamente.

Il caso più importante è la funzione $y = e^x = \exp(x)$; il numero e è un numero irrazionale che definiremo più avanti (capitolo delle successioni), detto numero di Nepero

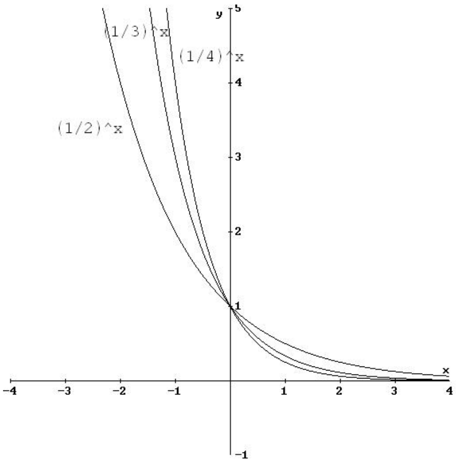
$e \cong 2.718281828459004523\ldots\ldots$

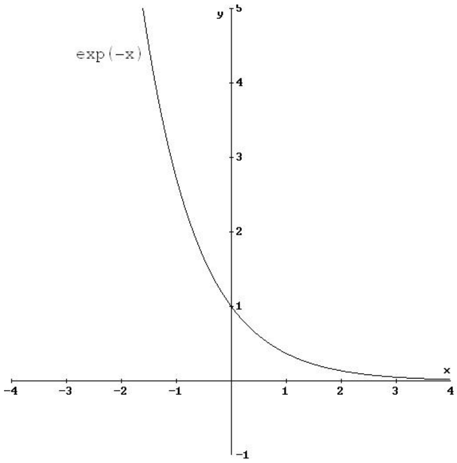




2° caso $0 < a < 1$
f strettamente decrescente su **R**
f limitata inferiormente: $\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = 0$
f non ha minimo (non assume mai il valore y = 0)
f non limitata superiormente: $\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$
Quanto più la base a è piccola, tanto più la funzione decresce rapidamente.
Un caso importante è

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x} = \exp(-x)$$





Proprietà

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
2. $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ $\forall x, y \in \mathbf{R}$
3. $\left(a^x\right)^y = x^{xy}$

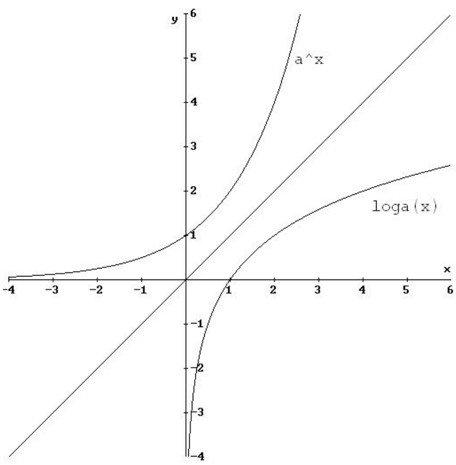
Una proprietà importante: la funzione esponenziale è iniettiva su **R**, quindi possiede inversa.
La **funzione inversa dell'esponenziale** è la **funzione logaritmo**.

5. Funzione logaritmo

Se a > 0, a ≠ 1, la funzione esponenziale $y = a^x$ è iniettiva, quindi invertibile. L'inversa è la funzione logaritmo

$y = \log_a x$ dom f = $(0,+\infty)$ im f = **R**

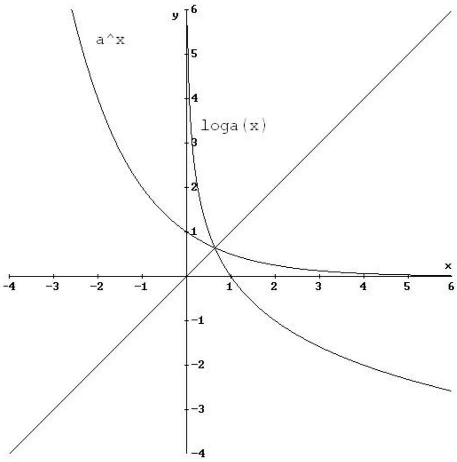
Il logaritmo in base a del numero x è l'esponente che occorre dare alla base a per ottenere x.
1° caso $a > 1$



f strettamente crescente su R
f non limitata né superiormente né inferiormente
$\sup_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$ $\inf_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -\infty$

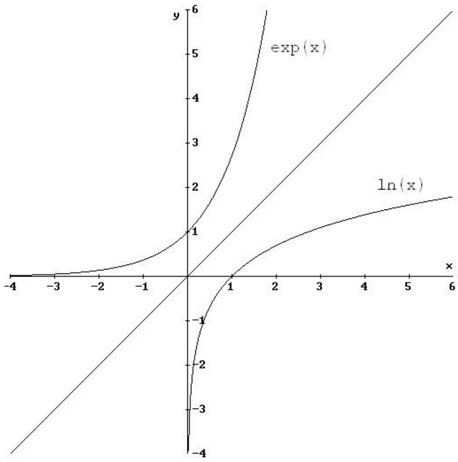
Notare la simmetria della funzione esponenziale e della sua funzione inversa, il logaritmo, rispetto alla bisettrice y = x.

2° caso $0 < a < 1$



f strettamente decrescente
f non limitata né superiormente né inferiormente

$\sup\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = +\infty$ $\inf\limits_{x \in \mathbf{R}} f(x) = -\infty$



Un caso importante è la funzione che si ottiene per a = e

$y = \ln x$ **logaritmo naturale (in base e)**

Un altro caso noto è a = 10

$y = \operatorname{Log} x$ **logaritmo in base 10**

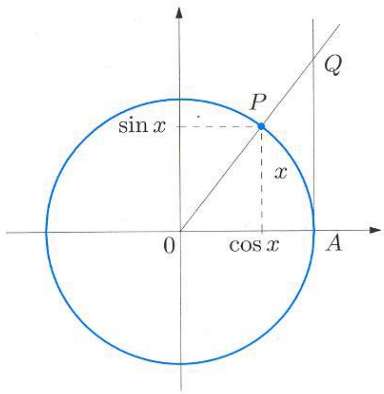
Proprietà

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $\forall x,y > 0$
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ $\forall x,y > 0$
3. $\log_a x^y = y \log_a x$ $\forall x > 0 \quad \forall y \in \mathbf{R}$

6. Funzioni trigonometriche

La circonferenza trigonometrica è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1; ha equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$



A partire dal punto A si percorre la circonferenza in senso antiorario; indichiamo con P il punto sulla circonferenza ottenuto percorrendo la circonferenza per un arco di lunghezza $x \geq 0$.
Il punto P individua un angolo : il numero x rappresenta la misura dell'angolo in radianti.
L'angolo di un radiante è quello individuato sulla circonferenza dall'arco di lunghezza 1.
Indichiamo con cos x (coseno di x) e con sin x (seno di x) l'ascissa e l'ordinata del punto P

P(cos x, sin x)

La funzione y = cos x e la funzione y = sin x sono definite su **R** e assumono tutti i valori compresi fra −1 e 1.
Sono entrambe funzioni limitate: il massimo è 1, il minimo è −1.
Sono periodiche di periodo P = 2π

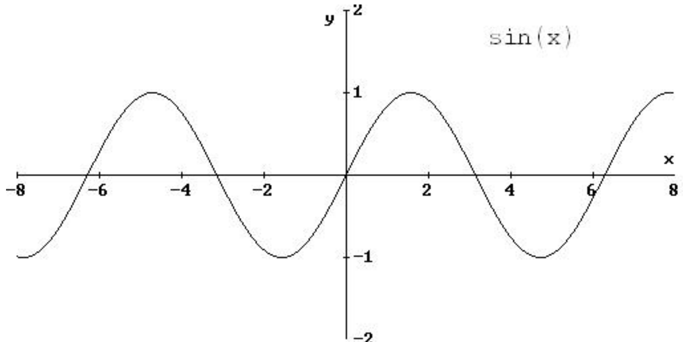
$\sin(x+2\pi) = \sin x$

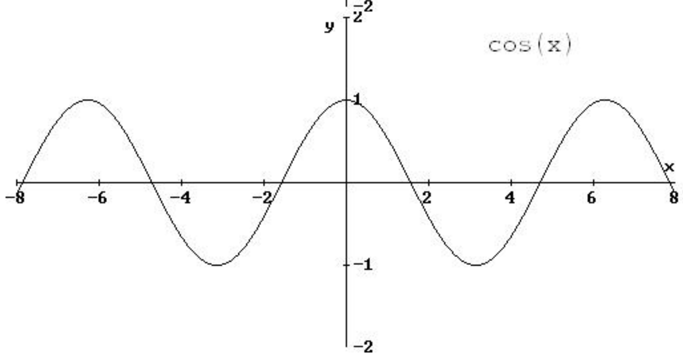
$\cos(x+2\pi) = \cos x$

y = sin x è una funzione dispari; y = cos x è una funzione pari:44

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$





Alcune formule (altre formule utili sui manuali di trigonometria)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$$

....

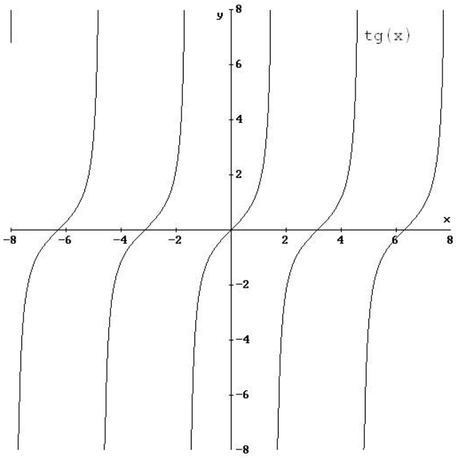
La funzione **tangente** è definita come

$$y = \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Il dominio della funzione tg x deve escludere i punti in cui si annulla il denominatore

$\cos x \neq 0 \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad\qquad \text{dom } f = R \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$

f è dispari, periodica di periodo P = π; è strettamente crescente su ogni intervallo $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$.



7. Funzioni inverse delle funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche sen x, cos x, tg x non sono iniettive nel loro dominio, quindi non possiedono inversa sul dominio; occorre considerare delle restrizioni.

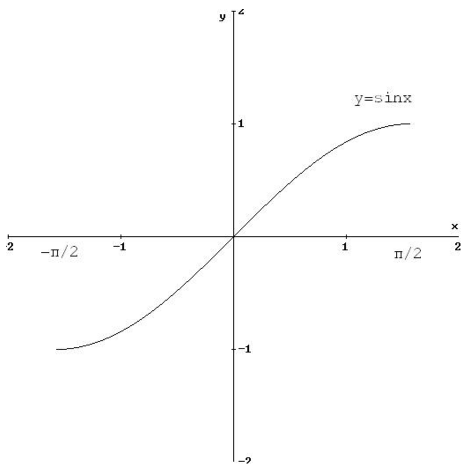
Data la funzione y = sin x, consideriamo la restrizione all'intervallo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

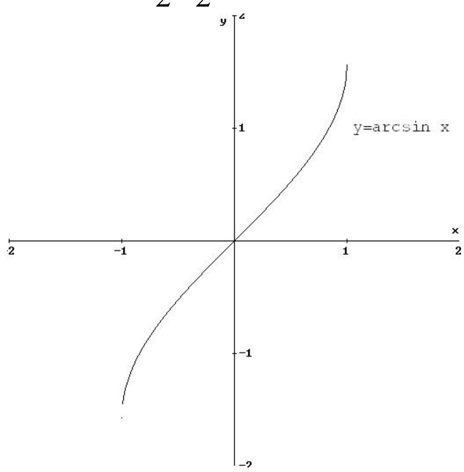
f(x) = sin x   dom f = $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ im f = [−1,1]

In questo intervallo la funzione è monotona strettamente crescente, quindi iniettiva, perciò possiede inversa. La **funzione inversa** è **y = arcsin x** (arcoseno di x)

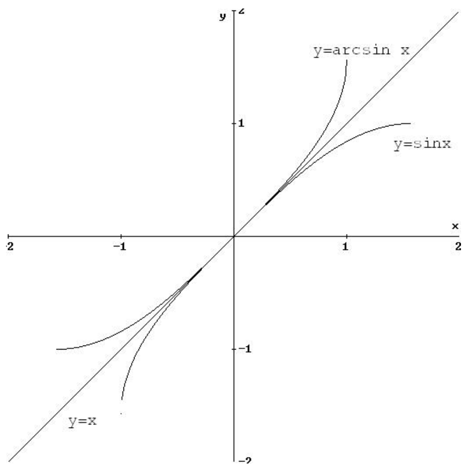
$f^{-1}(x)$ = arcsin x   dom f = [−1,1]   im f = $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

La funzione y = arcsin x è monotona strettamente crescente in $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, ed è una funzione dispari.





Si noti (grafico seguente) che la funzione arcsin x è simmetrica della funzione sin x rispetto alla bisettrice y = x (è la funzione inversa!)



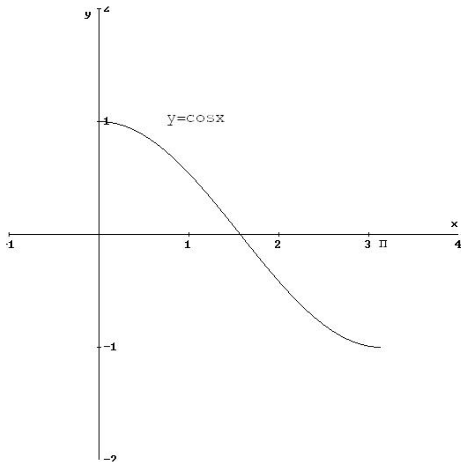
Data la funzione y = cos x, consideriamo la restrizione all'intervallo $[0,\pi]$

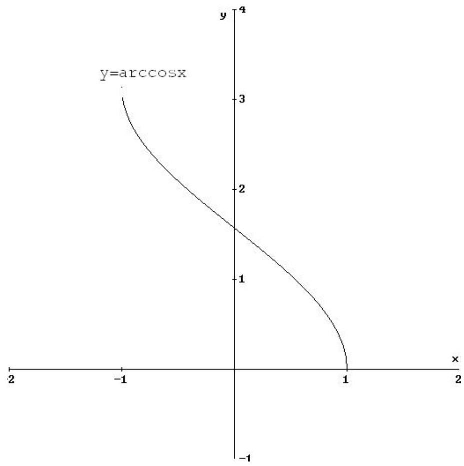
$f(x) = \cos x \qquad \text{dom } f = [0,\pi] \qquad \text{im } f = [-1,1]$

In questo intervallo la funzione è monotona strettamente decrescente, quindi iniettiva, perciò possiede inversa. La **funzione inversa** è **y = arccos x** (arcocoseno di x)

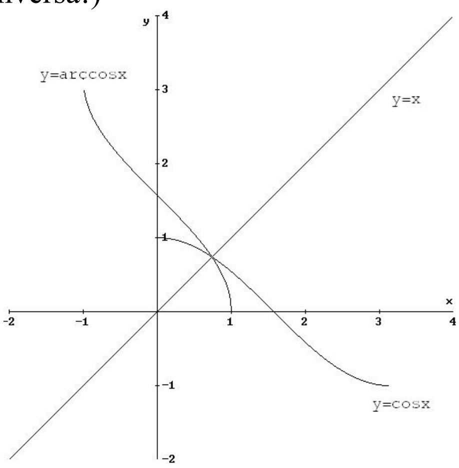
$f^{-1}(x) = \arccos x \qquad \text{dom } f = [-1,1] \qquad \text{im } f = [0,\pi]$

La funzione y = arccos x è monotona strettamente decrescente in $[-1,1]$.





Si noti (grafico seguente) che la funzione arccos x è simmetrica della funzione cos x rispetto alla bisettrice y = x (è la funzione inversa!)



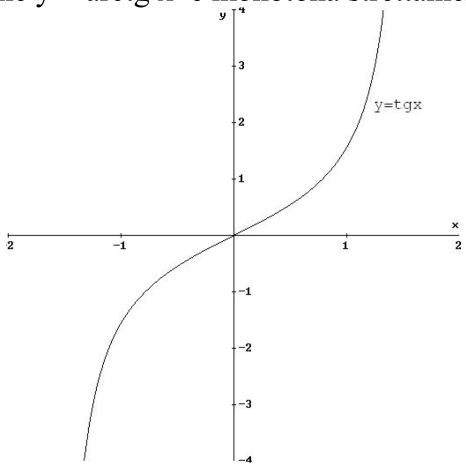
Data la funzione y = tg x, consideriamo la restrizione all'intervallo $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

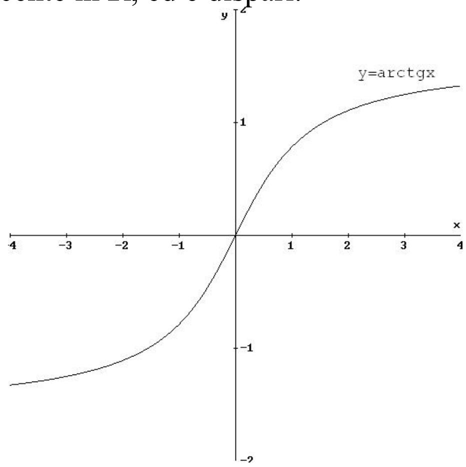
$f(x) = \cos x \qquad \text{dom } f = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \qquad \text{im } f = \mathbf{R}$

In questo intervallo la funzione è monotona strettamente crescente, quindi iniettiva, perciò possiede inversa. La **funzione inversa** è **y = arctg x** (arcotangente di x)

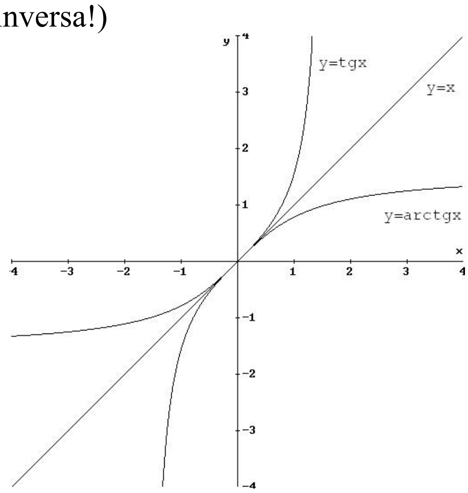
$f^{-1}(x) = \text{arctg } x \qquad \text{dom } f = \mathbf{R} \qquad \text{im } f = (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

La funzione y = arctg x è monotona strettamente crescente in **R**, ed è dispari.



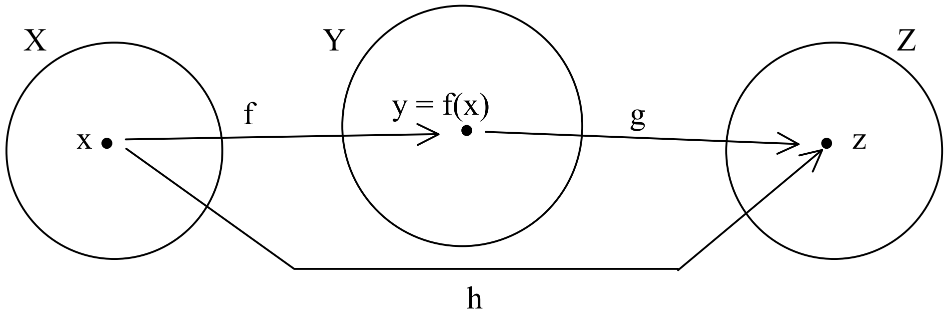


Si noti (grafico seguente) che la funzione arctg x è simmetrica della funzione tg x rispetto alla bisettrice y = x (è la funzione inversa!)



8. Funzione composta

Siano X, Y, Z tre insiemi; sia f una funzione definita in X a valori in Y e g una funzione definita in Y a valori in Z.



Possiamo costruire una nuova funzione h definita in X e a valori in Z ponendo

$h : X \to Z \qquad h(x) = g(f(x))$

La funzione h si dice **funzione composta** di f e g e si indica con il simbolo $h = g \circ f$ (si legge g composto f).

Il dominio della funzione composta $g \circ f$ si determina tenendo conto della definizione $h(x) = g(f(x))$: per poter calcolare f(x), x deve appartenere al dominio di f; per poter calcolare g(f(x)), f(x) deve appartenere al dominio di g. Pertanto

$x \in \text{dom } g \circ f$ se e solo se $x \in \text{dom } f$ e $f(x) \in \text{dom } g$

Quindi il dominio di $g \circ f$ è un sottoinsieme del dominio di f (vedere esempi).

L'operazione di composizione non è commutativa: in generale $g \circ f$ è diversa da $f \circ g$ (vedere esempi)

Esempi

$f(x) = x+1 \qquad g(x) = \sqrt{x}$

$\text{dom } f = \mathbf{R} \qquad \text{dom } g = [0,+\infty)$

$h = g \circ f \qquad h(x) = g(f(x)) = \sqrt{x+1} \qquad \text{dom } g \circ f = [-1, +\infty)$

$k = f \circ g \qquad k(x) = f(g(x)) = \sqrt{x} + 1 \qquad \text{dom } f \circ g = [0,+\infty)$

Le funzioni $g \circ f$ e $g \circ f$ sono diverse! (la composizione non è commutativa)

$f(x) = 2x \qquad g(x) = 3x^2 - 1$

$\text{dom } f = \mathbf{R} \qquad \text{dom } g = \mathbf{R}$

$h = g \circ f \qquad h(x) = g(f(x)) = 3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1 \qquad \text{dom } g \circ f = \mathbf{R}$

$k = f \circ g \qquad k(x) = f(g(x)) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2 \qquad \text{dom } f \circ g = \mathbf{R}$

Osservazione

Se f e g sono entrambe monotone, anche $g \circ f$ sarà monotona: precisamente se f e g sono entrambe crescenti oppure entrambe decrescenti, $g \circ f$ sarà crescente; negli altri casi sarà invece decrescente.

Se f è una funzione iniettiva, esiste la funzione inversa f^{-1} e si ha

$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x \qquad \forall x \in \text{dom } f$

si ottiene la **funzione identità** (associa a x lo stesso x).

Esempi

$f(x) = e^x \qquad f^{-1}(x) = \ln x \qquad f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$

e anche

$f(f^{-1}(x)) = e^{\ln x} = x$

$f(x) = \sin x \qquad f^{-1}(x) = \arcsin x \qquad f^{-1}(f(x)) = \arcsin(\sin x)) = x$

e anche

$f(f^{-1}(x)) = \sin(\arcsin x)) = x$

$f(x) = \cos x \qquad f^{-1}(x) = \arccos x \qquad f^{-1}(f(x)) = \arccos(\cos x)) = x$

e anche

$f(f^{-1}(x)) = \cos(\arccos x)) = x$

$f(x) = \text{tg } x \qquad f^{-1}(x) = \text{arctg } x \qquad f^{-1}(f(x)) = \text{arctg}(\text{tg } x)) = x$

e anche

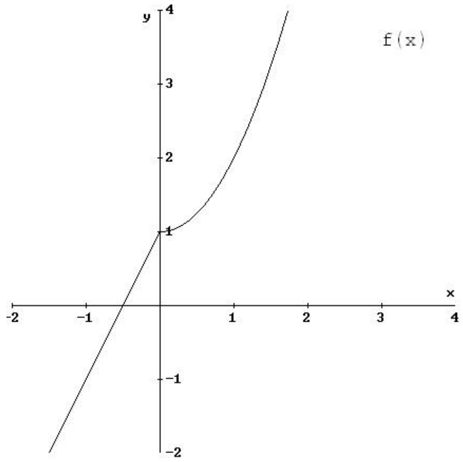
$f(f^{-1}(x)) = \text{tg}(\text{arctg } x)) = x$

<u>Esercizi</u>

Verificare che la funzione

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & x\le 0 \\ x^2+1 & x>0 \end{cases}$$

è iniettiva e trovare l'inversa



La funzione f è definita a tratti; è una funzione monotona strettamente crescente, quindi è iniettiva e possiede inversa, e f^{-1} è ancora monotona strettamente crescente.

dom f = R = $(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$ im f = R = $(-\infty,1]\cup(1,+\infty)$

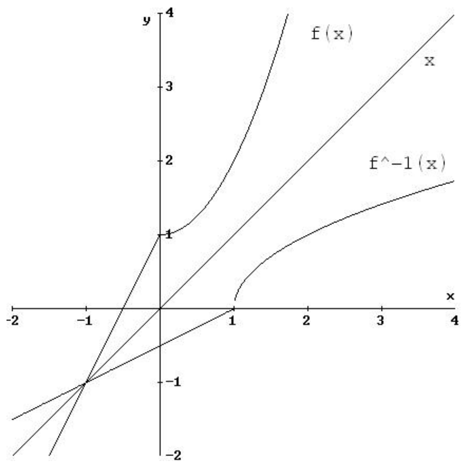
I punti dell'intervallo $(-\infty,0]$ hanno immagine nell'intervallo $(-\infty,1]$; i punti dell'intervallo $(0,+\infty)$ hanno immagine in $(1,+\infty)$.

$y = 2x+1 \qquad x = \dfrac{y-1}{2} \qquad f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ (si cambia il nome delle variabili)

$y = x^2+1 \qquad x = \sqrt{y-1} \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

Pertanto

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} & x\le 1 \\ \sqrt{x-1} & x>1 \end{cases}$$



E’ data la funzione

$$f(x)=\sqrt{|x-1|-1}$$

Trovare il dominio e l’immagine; dire se è limitata inferiormente e/o superiormente, se ha massimo e/o minimo, trovare gli intervalli in cui è strettamente monotona; trovare una restrizione iniettiva e determinare l’inversa di questa restrizione.

Dominio: affinché la radice quadrata sia definita deve essere

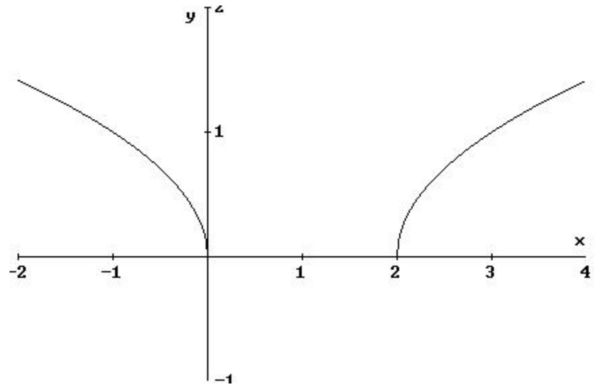
$$|x-1|-1\geq 0$$

$$|x-1|\geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x-1\leq -1 \vee x-1\geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x\leq 0 \vee x\geq 2$$

dom f = $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$

La funzione può essere scritta come funzione a tratti

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x} & x\leq 0\\ \sqrt{x-2} & x\geq 2\end{cases}$$



im f = $[0,+\infty)$

f limitata inferiormente $\inf\limits_{x\in \text{domf}} f(x)=0$

minimo $m = 0$ punti di minimo $x_m = 0$ e $x_m = 2$

f non limitata superiormente $\sup\limits_{x\in \text{domf}} f(x)=+\infty$

f è strettamente decrescente su $(-\infty,0)$, e strettamente crescente su $[2,+\infty)$.

La restrizione di f a $[2,+\infty)$ è iniettiva, perciò possiede inversa e l’inversa è

$$y = f^{-1}(x) = x^2+2$$