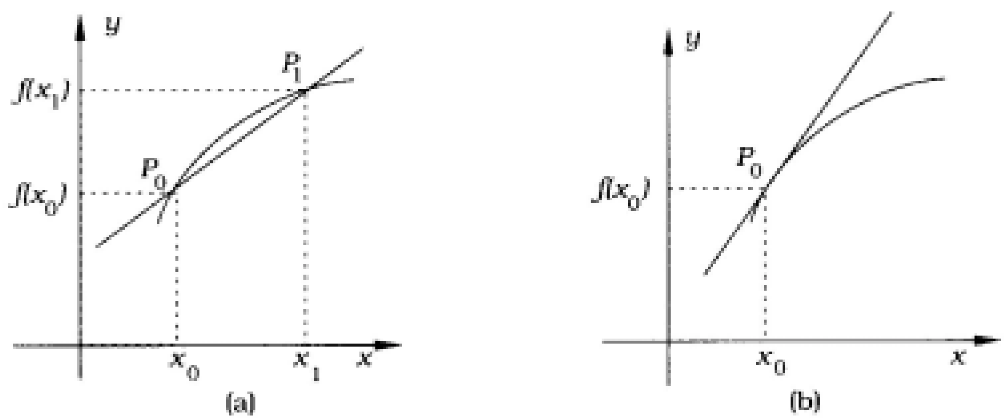
DERIVATE

1.Definizione di derivata.

Sia y = *f(x)* una funzione continua. Fissato un punto x_o appartenente all'insieme di definizione della funzione y = *f(x)*,sia $P_o = (x_0; f(x_o))$ il punto di ascissa x_o appartenente al grafico della funzione. Considerato un ulteriore punto x_1, sempre appartenente all'insieme di definizione della funzione y = *f(x)*, sia $P_1 = (x_1; f(x_1))$ il punto di ascissa x_1 appartenente allo stesso grafico. I due punti P_0, P_1 individuano una retta *secante* al grafico.

Fermo restando il punto x_o, immaginiamo ora di ripetere la costruzione, scegliendo x_1 via via più vicino ad x_o. Al tendere di x_1 ad x_0 (sia da destra che da sinistra) la retta secante tende in generale ad assumere una posizione limite t, che prende il nome di retta *tangente*



al grafico nel suo punto P_0 .

Il coefficiente angolare della retta secante è:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

che assume la forma di rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se si pone, $\Delta x = x_1 - x_o$ (incremento della variabile x) e $\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$ (incremento della variabile y corrispondente all'incremento Δx della variabile x).

Passando al limite quando x_1 tende a x_0, si ottiene il coefficiente angolare della retta tangente t

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Questo numero chiamasi la derivata della funzione $y = f(x)$ nel punto x_0 e si denoterà con $f'(x_0)$.

Una funzione $f(x)$ si dice derivabile se ammette derivata in ogni punto del suo insieme di definizione.

Le funzioni polinomiali, esponenziali, logaritmiche, trigonometriche sono tutte funzioni derivabili.

1. Continuità e derivabilità.

Vale il seguente teorema: *Se una funzione $f(x)$ è derivabile in x_0 allora essa è ivi continua.*

Infatti, dall'identità $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ si deduce

$f(x) = f(x_0) + \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ e passando al limite per $x \to x_0$ essendo

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ e $\lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = 0$ si ha che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,cioè

$f(x)$ è continua in x_0.

Il teorema inverso non vale ,cioè :*una funzione in un punto può essere continua senza che in esso sia derivabile.*

Esempio :

la funzione $y = |x|$ è continua in 0 ma non è ivi derivabile.

Infatti è $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{|x|}{x} \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

e passando al limite per $x \to 0$ poiché i due limiti non coincidono, segue che la funzione $y = |x|$ non è derivabile in 0.

Tale punto è un *punto angoloso.*

3. Calcolo delle derivate.

Per calcolare la derivata di una funzione generica basta conoscere le derivate delle funzioni elementari di cui all'allegata tabella e le regole di derivazione successivamente riportate.

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Ambito di validità
Costante	0	
x	1	
x^n	nx^{n-1}	$n \in$ R (se n non è intero si deve supporre x)
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a>0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x>0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$	$a>0,\ x>0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$1/\cos^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k intero)
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1<x<1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-1<x<1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Derivata di una somma: $(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Derivata di una differenza: $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$.

Derivata di un prodotto: $(f\cdot g)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$.

Derivata del prodotto di una funzione per una costante: $(Cf)'(x)=C\cdot f'(x)$.

Derivata di un quoziente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$.

Derivata di una funzione composta.

Se $y=f(t), t=g(x)$, e $y=h(x)=f(g(x))$ è la funzione composta, si ha:

$$h'_x=f'_t\cdot g'_x$$

essendo g'_x la derivata di $g(x)$ rispetto alla variabile x, f_t' la derivata di $f(t)$ rispetto alla variabile t (calcolata nel punto $t=(g(x))$, h'_x la derivata della funzione composta $h(x)=f(g(x))$ rispetto alla variabile x.

Derivata di una funzione definita a tratti, in un punto di raccordo.

In un punto x_0 di raccordo fra due tratti, la funzione risulta *derivabile* solo se in tale punto essa è continua e se inoltre la *derivata sinistra* (limite dei rapporti incrementali quando x_1 tende ad x_0 da sinistra) coincide con la *derivata destra* (limite dei rapporti incrementali quando x_1 tende ad x_0 da destra).

Intuitivamente, la continuità significa che la funzione non presenta salti, mentre l'ulteriore condizione di coincidenza tra derivata sinistra e derivata destra significa che la funzione non presenta *punti angolosi*.

Derivate successive.

La derivata di una funzione $f(x)$ è una nuova funzione $f'(x)$ la quale può essere a sua volta derivata. La derivata di $f'(x)$ si chiama derivata seconda e si indica con $f''(x)$. Analogamente si può calcolare la derivata di $f''(x)$ ottenendo la derivata terza $f'''(x)$, ecc…

4. Crescenza, decrescenza, massimi, minimi, flessi, concavità.

Per lo studio delle funzioni l'uso delle derivate è molto utile.

Infatti considerata una funzione derivabile *f(x)*, dalla definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, segue subito che *nei tratti in cui f'(x) è positiva, la funzione cresce, mentre nei tratti in cui f'(x) è negativa, la funzione decresce.*(1)

Quanto ai punti nei quali *f'(x)* si annulla, occorre distinguere vari casi:

- Se in un punto x_0 si ha $f'(x_0) = 0$ e se inoltre *f'(x)* è negativa a sinistra di x_0 e positiva a destra di x_0, la funzione ha un *minimo* in x_0.
- Se in un punto x_0 si ha $f'(x_0) = 0$ e se inoltre *f'(x)* è positiva a sinistra di x_0 e negativa a destra di x_0, la funzione ha un *massimo* in x_0.
- Se in un punto x_0 si ha $f'(x_0) = 0$ e se inoltre *f'(x)* ha il medesimo segno sia a sinistra, sia a destra di x_0, la funzione ha un *flesso orizzontale* in x_0.

---

(1) In modo rigoroso, premesso che:

Una funzione f(x) $A \subseteq R \to R$ *si dice che e' crescente (decrescente) in* x_0 *se esiste un intorno di* x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, *tale siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[\cap A$ *si ha* $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$
2. $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\cap A$ *si ha* $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$

Vale il seguente teorema:

Se la funzione f(x) e' derivabile in un punto x_0 *ed e'* $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$ *allora e' f'(x)e' crescente (decrescente) in e'* x_0.

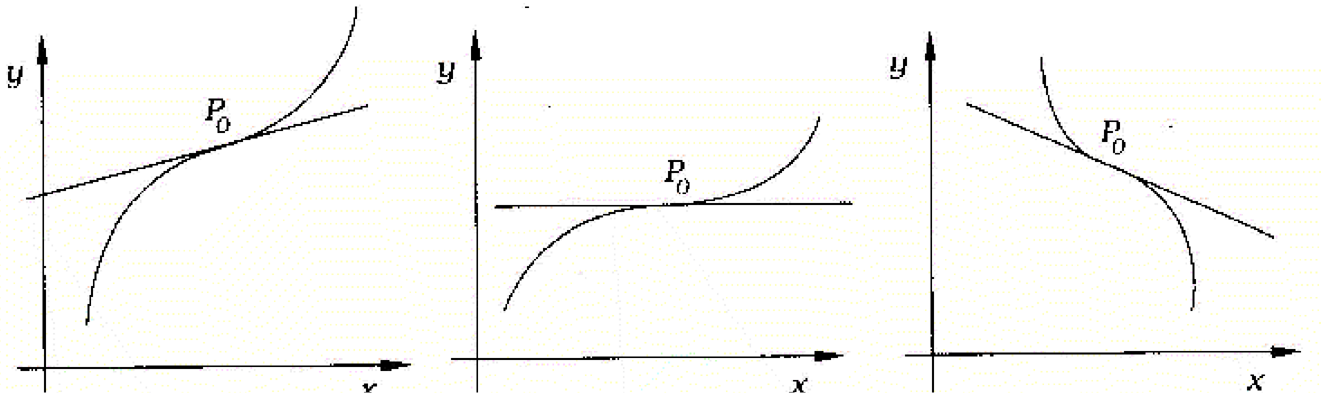
Dimostrazione: Per ipotesi e' $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x) > 0$ *pertanto, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di e'* x_0, $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, *tale che* $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$ *per ogni* $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $x \in A$, $x \neq x_0$

Segue che:

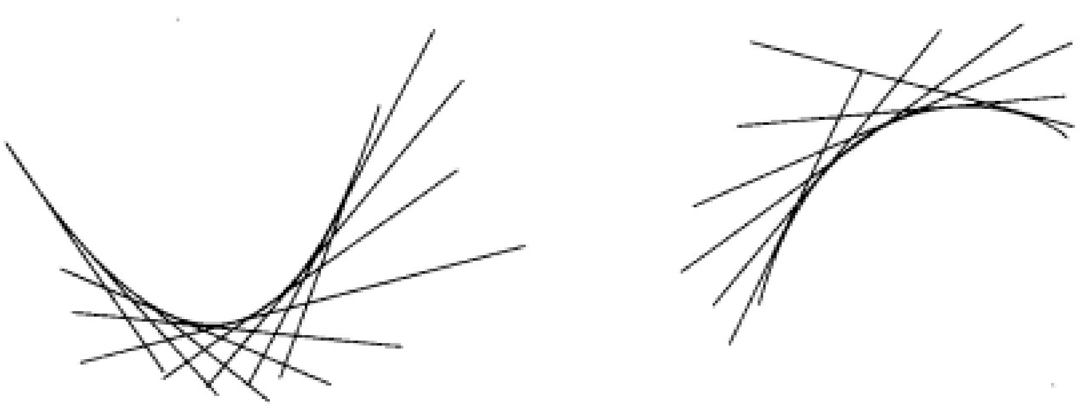
- *per* $x \in]x_0 - \delta, x_0[$, $x \in A$, *essendo* $x < x_0$ *e'* $f(x) < f(x_0)$ *cioè vale la 1.*
- *per* $x \in]x_0, x_0 + \delta[$, $x \in A$, *essendo* $x > x_0$ *e'* $f(x) > f(x_0)$ *cioè vale la 2.*

Osservazione:
Il viceversa del suddetto teorema non vale rigorosamente. Si dimostra infatti che:
Se f(x) e' crescente (decrescente) ed e' invertibile in $x_0 \in A$, *allora e'* $f'(x_0) \geq 0$ $(f'(x_0) \leq 0)$.

La nozione di "flesso orizzontale" rientra in quella più generale di "flesso" (non necessariamente orizzontale): *si dice che x_0 è un punto di flesso per la funzione $y = f(x)$ se la retta t, tangente al grafico nel punto $P_0 = (x_0; f(x_0))$, attraversa il grafico stesso,* nel senso che, in prossimità di P_0, i punti del grafico che precedono P_0 e quelli che seguono P_0 stanno da parti opposte rispetto a *t* .
Di seguito sono disegnati tre punti di flesso; quello in centro è un flesso orizzontale



I punti di flesso si ricollegano alla nozione di <u>*concavità*</u> di una funzione: *si dice che in un punto x_0 la funzione $y = f(x)$ volge la sua concavità verso l'alto [basso] se in prossimità di $P_0 = (x_0; f(x_0))$ il grafico della funzione sta tutto "al di sopra" ["al di sotto"] della retta tangente t.*
Con questa terminologia, i punti di flesso vengono caratterizzati come quei punti nei quali la concavità(2) della funzione cambia il suo verso.
Si dimostra che in un punto di flesso x_0 si ha *$f''(x_0)$.* Se poi in x_0 risulta simultaneamente *$f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)=0$* allora x_0 e' un flesso orizzontale.



---

(2) A proposito di concavità si dimostra il seguente teorema: Sia f(x) una funzione reale avente in x_0 derivate fino a quelle di ordine n tali che $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots= f^{n-1}(x_0)=0$ e $f^n(x_0) \neq 0$. Se n è pari allora in x_0 la f(x) volge la sua concavità verso l'alto o il basso a seconda che sia $f^n(x_0)>0$ oppure $f^n(x_0)<0$. Se n è dispari allora in x_o la f(x) ha un flesso.

5.Regola pratica per la determinazione dei massimi e minimi.

Sussiste il seguente teorema:

Se x_0 e' un punto di minimo (massimo) relativo per f(x) ed esiste $f'(x_0)$, allora e' $f'(x_0)=0$

Dimostrazione: per ipotesi esiste un intorno di x_0, $]\, x_0 - \delta, x_0 + \delta\,[$, per tutti i punti del quale appartenenti al campo di esistenza di *f(x)* si ha $f(x_0) \leq f(x)$ ed inoltre e'

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \in R$$

Per $x<x_0$ essendo $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ (per il teorema sulla permanenza del segno) risulta $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, mentre per $x > x_0$ essendo $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (sempre per il teorema sulla permanenza del segno) risulta $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ e poiché *f(x)* e' derivabile in x_0, questi due limiti devono necessariamente coincidere, essendo 0 l'unico valore per cui coincidono segue la tesi.

L'affermazione secondo cui *"i punti di minimo e di massimo di y = f(x) sono quelli nei quali si annulla la derivata prima"*, sotto certi aspetti è imprecisa e può essere quindi fonte di errori.

Infatti ,osserviamo che:

1. Il fatto che la derivata prima si annulla nel punto x_0 non ci assicura che in quel punto la funzione abbia un minimo o un massimo. Potrebbe avere un flesso orizzontale o addirittura potrebbero presentarsi situazioni ancora più complicate, per es. una serie di ondulazioni sempre più smorzate all'avvicinarsi di x ad x_0. Occorre quindi necessariamente studiare *il segno* della derivata prima nei punti a *sinistra* e nei punti a *destra* di x_0.

Esempio: si pensi alla funzione $y = x^3$.

2. La funzione *f(x)* non è detto che sia derivabile in tutti i punti del suo campo di esistenza, e tuttavia può in essi ammettere dei minimi o dei massimi e quindi in tali punti la situazione va esaminata caso per caso.

Esempi. Le funzioni y = 3 + |x| e y = |x|, …

3. Se il campo di esistenza è un intervallo o l'unione di intervalli, limitati o illimitati, agli estremi di essi, qualora questi appartengono all'insieme di definizione, la funzione può avere un punto di minimo o di massimo anche senza che la derivata destra o sinistra si annulli.

Esempio. La funzione y = $\sqrt{4-x^2}$ è definita sull'intervallo [-2,2]. Questa funzione ha un punto di massimo in x = 0, come si riconosce subito col metodo dell'annullamento della derivata prima; la funzione presenta però anche due punti di minimo nei due estremi dell'intervallo, vale a dire in x = -2 e in x = 2, non individuabili con l'annullamento della derivata.

Concludendo: *la condizione f'(x) = 0 per l'esistenza di un massimo o minimo*

- *non è necessaria* per quanto visto in 2 e 3 (non esiste la derivata, la derivata destra o sinistra non si annulla)
- *e non è neppure sufficiente* per quanto visto in 1 (stesso segno della *f'(x)* in un intorno di x_0).

Pertanto una descrizione corretta ed esauriente del procedimento per determinare i punti di minimo o di massimo va articolata secondo la seguente **regola pratica:**

1. Si individuano gli eventuali punti nei quali la funzione non è derivabile, e in ciascuno di questi punti si esamina caso per caso, con considerazioni dirette, il comportamento della funzione, per vedere se ivi essa presenta un minimo o un massimo.

2. Si ripete un analogo procedimento per i punti che sono estremi dell'insieme di definizione della funzione.

3. Per tutti gli altri punti, si ricorre al metodo dell'annullamento della derivata prima, ossia si determinano le soluzioni dell'equazione $f'(x) = 0$; tra i punti che soddisfano a tale condizione si stabilisce quali sono di minimo, di massimo o di flesso, mediante considerazioni sul segno della derivata prima.

4. Si effettua un confronto diretto tra i valori assunti dalla funzione nei punti di minimo (o di massimo) trovati, per stabilire quali sono punti di minimo (o di massimo) *relativo* o *assoluto*.

Spesso per evitare lo studio del segno della derivata prima, si preferisce calcolare la derivata seconda, e ricorrere ad un teorema[1] che dà una condizione sufficiente per l'esistenza di un minimo o di un massimo. Chiaramente non è il caso di ricorrere a tale teorema quando è più semplice esaminare direttamente il segno della derivata prima.

Teorema: *Sia $f(x)$ una funzione reale avente in x_0 derivate fino a quelle di ordine n tali che*

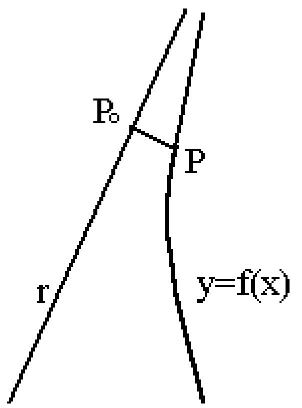
$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots \qquad = f^{n-1}(x_0)=0$ e $f^n(x_0) \neq 0$.

Se n è pari allora x_0 è un punto di minimo o di massimo relativo a seconda che sia $f^n(x_0) > 0$ oppure $f^n(x_0) < 0$.

Se n è dispari allora la $f(x)$ in x_0 sarà crescente o decrescente secondo che sia $f^n(x_0) > 0$ oppure $f^n(x_0) < 0$.

6. Asintoti

Una retta r si dice che è un asintoto per il grafico di una funzione y=f(x) che si estende all'infinito se la distanza di un punto $P \equiv (x, f(x))$ *del grafico da r, d(P,r), tende a zero al tendere del punto P all'infinito (cioè al tendere all'infinito di almeno di una delle due coordinate).*



Posto $d(P,r)=d(P,P_o)$

r asintoto $\Leftrightarrow \lim\limits_{P\to\infty} d(P,r)_{\text{lungo la f(x)}} = 0$

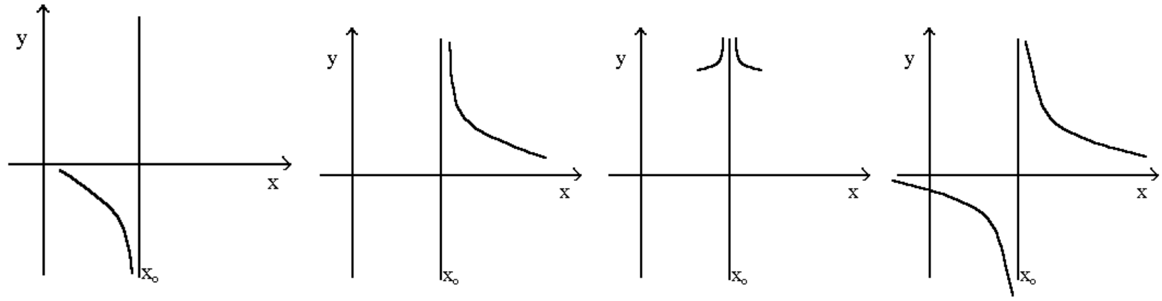
Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la retta r può essere "verticale" (parallela all'asse y), "orizzontale" (parallela all'asse x), obliqua.

Asintoti verticali. *La retta* $x=x_o$ *è un asintoto verticale per il grafico di y=f(x) se* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$

In pratica il limite per $x \to x_o$ può essere fatto solo da un lato (destro o sinistro) oppure da entrambi i lati ed inoltre esso può essere $+\infty$ oppure $-\infty$

Pertanto più precisamente *la retta* $x=x_o$ *è un asintoto verticale se almeno uno dei due limiti destro o sinistro per* $x \to x_o$ *è* $+\infty$ *oppure* $-\infty$.

Nelle seguenti figure sono rappresentati alcuni dei possibili casi [1]:



[1] I grafici dei restanti casi sono i loro simmetrici rispetto all'asse x

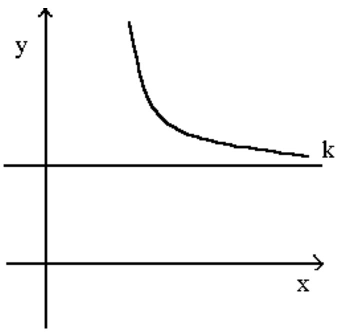
Esempi:

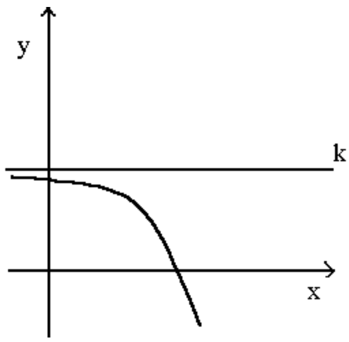
- la retta x=1 è un asintoto verticale per la $f(x)=\dfrac{3}{1-x}$ poiché è $\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$.
- la retta $x=-2$ è un asintoto verticale per la $f(x)=\lg(x+2)$ poiché è $\lim_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$.
- La retta x=3 è un asintoto verticale per la $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{3-x}}$ poiché è $\lim_{x\to 3^-} f(x)=+\infty$

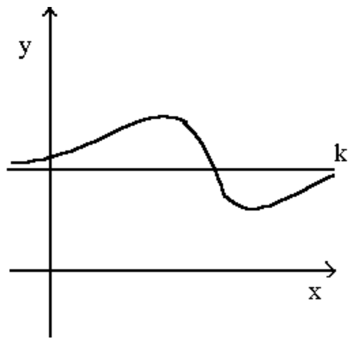
Asintoti orizzontali. *La retta y=k, con k∈ R, è un asintoto orizzontale per il grafico di y=f(x) se* $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$.

In pratica il limite può essere fatto per $x\to+\infty$ o per $x\to-\infty$.

Nelle seguenti figure sono rappresentati i grafici di alcuni dei possibili casi:







Esempi:

- la retta y=3 è un asintoto orizzontale per la $f(x)=\dfrac{3x^2+3x+2}{x^2-1}$ poiché è $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$; inoltre è $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$
- la retta y=1 è un asintoto orizzontale per la $f(x)=(3^x+1)$ poiché è $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$.

- la retta y=4 è un asintoto orizzontale per la $f(x)=\dfrac{4x+3}{x+2}$ poiché è $\lim_{x\to+\infty} f(x)=4$

  inoltre è $\lim_{x\to-\infty} f(x)=4$.

Asintoti obliqui. *Nel caso in cui è* $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ *il grafico di* $f(x)$ *non ammette asintoti orizzontali.*

Si dimostra che:

Se $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ *con* $m\in R^*$ *e* $\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=n$ con $n\in R$ *allora la retta* $y=mx+n$ *è un asintoto obliquo per il grafico di f(x).*

Esempi:

- La funzione $f(x)=\dfrac{3x^2+2}{x-5}$ non presenta asintoti orizzontali essendo $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x-5}=\infty$.

  Inoltre poiché

  - $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^2-5\ x}=3$

  - $\lim_{x\to\infty}[f(x)-3x]=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x^2+2}{x-5}-3x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{3x^2+2-3x^2+15x}{x-5}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\dfrac{15x+2}{x-5}\right]=15$

  la retta $y=3x+15$ è un asintoto obliquo per il grafico di f(x).

- La funzione $f(x)=$ x+logx non presenta asintoti orizzontali perché $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

  Inoltre poiché $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x+\log x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\log x}{x}\right)$=1 e $\lim_{x\to+\infty}(x+\log x-x)=+\infty$

  la funzione *f(x)* non ha nemmeno asintoti obliqui.

7. Teoremi di Rolle, Lagrange, De L'Hopital

Teorema di Rolle: *Se* $f(x)$ *è una funzione definita nell'intervallo chiuso* $[a,b]$ *soddisfacente le seguenti ipotesi:*

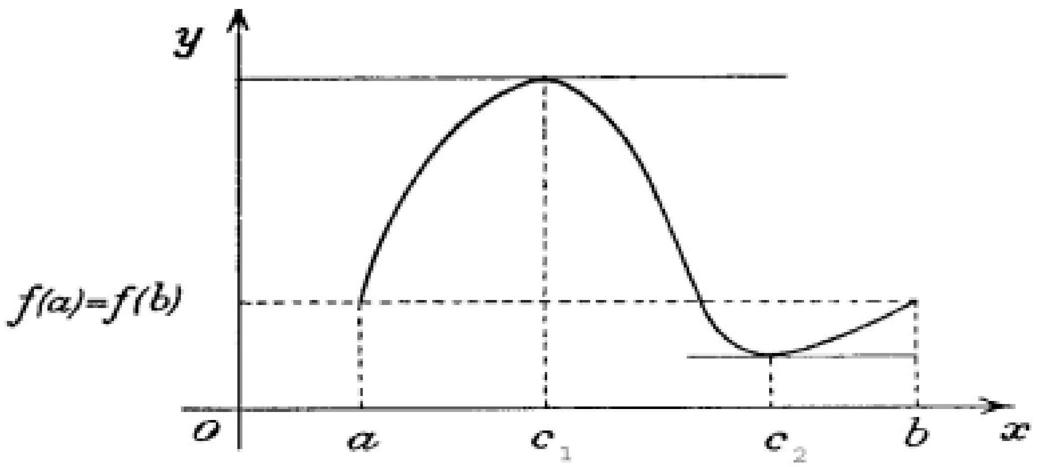
- *è continua in* $[a,b]$
- *è derivabile nei punti interni di* $[a,b]$, *cioè in* $]a,b[$
- *assume valori eguali agli estremi dell'intervallo, cioè* $f(a) = f(b)$

allora

esiste almeno un punto c interno all'intervallo $[a,b]$ *nel quale la derivata prima della funzione si annulla, cioè* $f'(c) = 0$ *·* $(\exists\ c \in\ ]a,b[:\ f'(c) = 0)$

Geometricamente tale teorema esprime il fatto che:

"Se il grafico della funzione y= $f(x)$ congiungente i punti A=$(a; f(a))$ e B=$(b; f(b))$ con $f(a) = f(b)$ è dotato di tangente in ogni suo punto esclusi al più gli estremi ,esiste almeno un punto C=$(c; f(c))$, *a<c<b,* di tale grafico in cui la tangente è parallela all'asse delle ascisse".



Teorema di Lagrange: *Se* $f(x)$ *è una funzione definita nell'intervallo chiuso* $[a,b]$ *soddisfacente le seguenti ipotesi:*

- *è continua in* $[a,b]$
- *è derivabile nei punti interni di* $[a,b]$*, cioè in* $]a,b[$

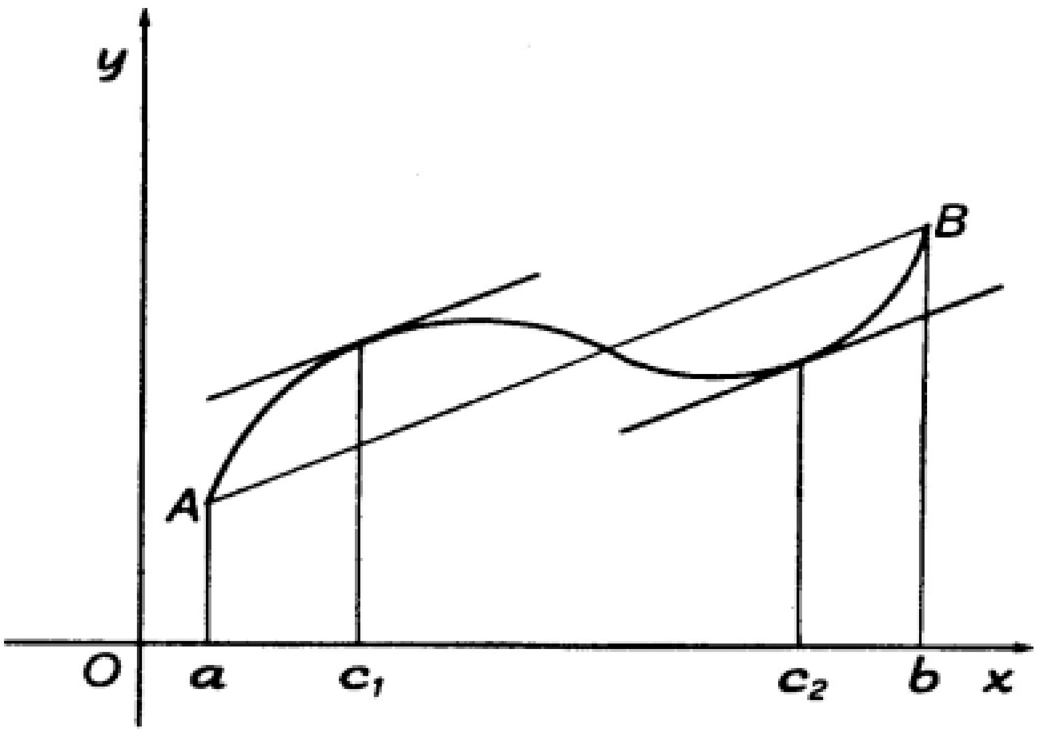
allora

esiste almeno un punto c interno all'intervallo $[a,b]$ *tale che* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

($\exists\, c \in \,]a,b[: \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$*).*

Geometricamente tale teorema esprime il fatto che:

Se il grafico della funzione y= $f(x)$ congiungente i punti A=$(a; f(a))$ e B=$(b; f(b))$ è dotato di tangente in ogni suo punto esclusi al più gli estremi ,esiste almeno un punto C=$(c; f(c))$, *a<c<b,* di tale grafico in cui la tangente è parallela alla retta congiungente i punti A e B.



Corollari del Teorema di Lagrange

1) *Se f(x) e' una funzione definita nell'intervallo chiuso [a, b] soddisfacente le seguenti ipotesi:*
   - *è continua in [a, b]*
   - *è derivabile nei punti interni di [a, b],]a, b[*
   - *per ogni $x \in$]a, b[e' f'(x) =0*

allora

f(x) e' costante in [a, b]

Dimostrazione: nell'intervallo *[a, x], a<x<b,* la *f(x)* soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange per cui esiste un $c \in$ *]a, x[* tale che $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$, e poiché in tutti i punti *x* di *]a, b[* e' f(x)=0, anche nel punto *c* e' *f(c)=0;* sarà perciò *f(x)=f(a),* cioè la funzione assume nel punto *x* il valore di *f(a).* Data l'arbitrarietà del punto $x \in$ *]a, b[* segue che la *f(x)* e' costante in *[a, b]* e il valore di tale costante e' *f(a).*

2) *Se f(x) e' una funzione definita nell'intervallo chiuso [a, b] e soddisfacente le seguenti ipotesi:*
   - *è continua in [a, b]*
   - *è derivabile nei punti interni di [a, b], cioe' in]a, b[*
   - *per ogni $x \in$]a, b[e' f'(x)>0 (f'(x)<0)*

allora

f(x) e' fortemente crescente (decrescente) in [a, b]

Dimostrazione: siano x_1, x_2 due punti qualsiasi in *[a, b]* con $x_1<x_2$, applicando alla *f(x)* il teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$ risulta $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$ essendo c un opportuno punto di $]x_1, x_2,[$. Poiche' *f'(x)>0 (f'(x)<0)* per ogni $x \in$ *]a, b[* e' pure *f'(c)>0 (f'(c)<0).*

Segue $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$). Per l'arbitrarieta' dei punti x_1 e x_2 con $x_1<x_2$ segue la tesi.

<u>Teorema di De L'Hôpital</u>

Siano *f(x)* e *g(x)* definite in $A \subseteq R$ e $x_0 \in A$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ oppure

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$. In tali ipotesi il $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ si presenterà nella forma

indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$.

Il seguente teorema, dovuto a De L'Hôpital ci dà delle condizioni sufficienti per la determinazione dei suddetti limiti.

<u>Teorema:</u> *Siano f(x) e g(x) due funzioni continue in A, nulle (infinite) nel punto x_0 e derivabili in un intorno $I^*(x_0)$. Se g'(x) pur potendosi annullare in x_0 non si annulla in $I^*(x_0)$ allora se esiste il* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *esisterà anche il* $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e questi due limiti sono eguali, cioè* $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Considerazioni.

1) Nel caso in cui il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ si presentasse pure nella forma $\frac{0}{0}$ (oppure $\frac{\infty}{\infty}$) si applicherà la stessa regola al rapporto delle derivate, passando alle derivate seconde, e così via.
2) Il teorema vale anche nel caso in cui x_0 è "all'infinito".
3) Le forme indeterminate $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$ si riconducono ai casi precedenti tenendo presente che è:

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$$