Esercizi

Esercizio n° 1

· Determinare il dominio e la derivata prima delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x}{4-x^2} \qquad g(x) = \ln(2x^2 - x)$$

Dom $f(x)$ = Si tratta di una funzione razionale fratta e quindi ha come insieme di definizione l'intero campo reale fatta eccezione per quei valori che annullano il denominatore

cioè i cosiddetti zeri del denominatore.

Quindi nel caso specifico bisogna porre

$4 - x^2 \neq 0 \rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x^2 = 4$

$x \neq \pm 2$

Pertanto il dominio della funzione

$f(x) = \frac{x}{4 - x^2}$ è $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$

$f'(x) =$ La derivata prima del quoziente di 2 funzioni derivabili è uguale alla differenza tra il denominatore moltiplicato per la derivata del numeratore ed il numeratore moltiplicato per la derivata del denominatore, il tutto diviso per il quadrato del denominatore.

Quindi $f' \dfrac{x}{4-x^2} = \dfrac{1 \cdot (4-x^2) - [(-2x) \cdot x]}{(4-x^2)^2} = \dfrac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2} =$

$$= \frac{x^2+4}{(4-x^2)^2}$$

Dom $g(x)$ = Si tratta di una funzione logaritmica e quindi bisogna imporre l'argomento del logaritmo maggiore di zero.

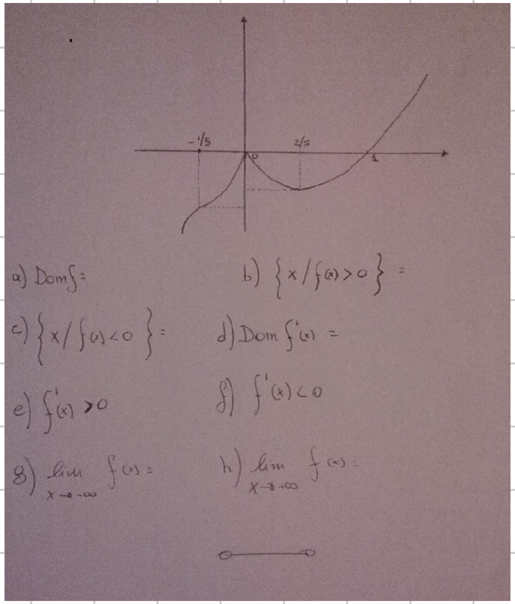
$2x^2 - x > 0 \rightarrow x(2x-1) > 0 \rightarrow x < 0$ e $x > \frac{1}{2}$

Quindi la funzione $f(x) = \ln(2x^2 - x)$ è definita negli intervalli $(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

$g'(x)$ = Si tratta della derivata di una funzione composta $\ln$ e $(2x^2 - x)$. La derivata di $\ln x = \frac{1}{x}$ mentre la derivata di $2x^2 - x$ è $4x - 1$.

Quindi la derivata della funzione $g(x) = \ln(2x^2 - x)$ è uguale a $g' \ln(2x^2 - x) = \frac{4x - 1}{2x^2 - x}$

Esercizio n°2



a) $\mathrm{Dom} f =$

b) $\{x / f(x) > 0\} =$

c) $\{x / f(x) < 0\} =$

d) $\mathrm{Dom} f'(x) =$

e) $f'(x) > 0$

f) $f'(x) < 0$

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

h) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e quindi il suo dominio è $\text{Dom} f(x) = (-\infty ; +\infty)$

b e c) La funzione è positiva nell'intervallo $(1 ; +\infty)$ e negativa negli intervalli $(-\infty ; 0)$ e $(0 ; 1)$*.

* (in zero la funzione si annulla).

d) La funzione è definita in $x = 0$ dove presenta un punto di cuspide. Quindi in $x = 0$ derivata prima non è definita.

Premesso ciò si può dire che il $\text{Dom} f'(x) = (-\infty ; 0) \cup (0 ; +\infty)$

e) La funzione è crescente tra $(-\infty ; 0)$ e $(\frac{2}{5} ; +\infty)$ e quindi in tali intervalli la derivata prima sarà positiva e la curva sarà tracciata sopra l'asse delle x.

f) Di conseguenza la funzione decresce nell'intervallo $(0 ; \frac{2}{5})$ e pertanto in tali intervallo la sua derivata prima sarà negativa ed il grafico (in questo intervallo) giacerà al di sotto dell'asse x.

g) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Esercizio n° 3

Determinare l'area della parte finita di piano compresa tra le due parabole di equazioni:

$y = 2x^2 - 4x + 4$ e $y = x^2 - 2x + 4$

Per prima cosa troviamo i punti d'intersezione delle 2 parabole

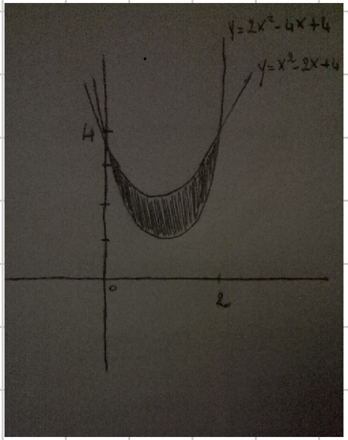
$$\begin{cases} y = 2x^2 - 4x + 4 \\ y = x^2 - 2x + 4 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow 2x^2 - 4x + \cancel{4} = x^2 - 2x + \cancel{4}$

$2x^2 - x^2 - 4x + 2x = 0 \rightsquigarrow x^2 - 2x = 0$

$\rightsquigarrow x(x-2) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$

Quindi i loro punti d'intersezione sono $A = (0,4)$ e $B = (2;4)$



Le due parabole sono rappresentate in figura, così come la regione di piano.

L'area di tale superficie, ovvero la parte finita di piano tra loro compresa è:

$$\text{area } S = \int_0^2 \left[(x^2-2x-4) - (2x^2-4x+4) \right] dx =$$

$$= \int_0^2 (-x^2+2x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

Esercizio n° 4

Avendo la distribuzione dei seguenti 7 valori positivi

4 ; 3 ; 5 ; 6 ; 1 ; 3 ; 2

Calcolare il loro scarto quadratico e varianza

Si calcola prima di tutto la media aritmetica della distribuzione data:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i}^{n} x_i}{n} = \frac{4+3+5+6+1+3+2}{7} = \frac{24}{7} \cong 3,43$$

Per lo scarto quadratico medio si ha:

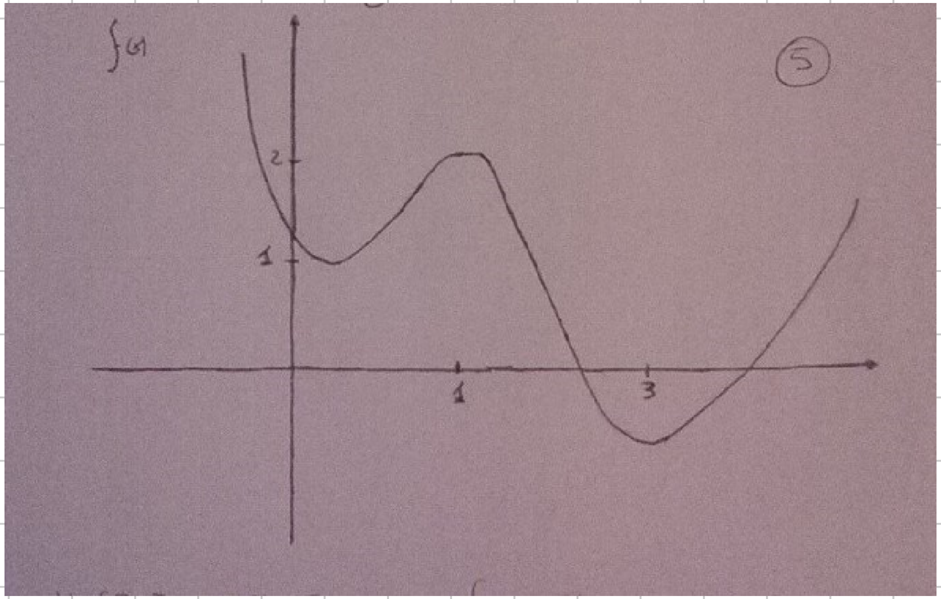
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{1}^{n} k \, (x_i - \bar{x})^2}{n}} =$$

$$= \frac{(4-3,43)^2 + (3-3,43)^2 + (5-3,43)^2 + (6-3,43)^2 + (1-3,43)^2 + (3-3,43)^2 + (2-3,43)^2}{7} \cong 1,72$$

Per la varianza si ha:

$VAR(x) = \sigma^2 \cong 1{,}72^2 \cong 2{,}96$

Esercizio n° 5



La funzione è decrescente tra $+\infty$ e $1/2$

In $1/2$ la pendenza è nulla

Poi tra $1/2$ e 1 la funzione è crescente

In $3/2$ la pendenza è nulla

Tra $3/2$ e 2 la funzione è decrescente

In 3 la pendenza è nulla

Infine tra 3 e $+\infty$ la funzione cresce.

Da tutto ciò si può dedurre che il grafico della derivata prima della funzione $f(x)$ sarà

- Negativo tra $-\infty$ e $\frac{1}{2}$ dove si annulla e quindi in $x = \frac{1}{2}$ interseca l'asse delle x. In tale intervallo il grafico cresce in quanto nello stesso intervallo la $f(x)$ presenta una concavità rivolta verso l'alto
- Positivo tra $1/2$ e $3/2$. Tra $1/2$ e 1 la $f(x)$ ha sempre la concavità verso l'alto e quindi in tale intervallo il grafico di $f'(x)$ cresce. Da 1 a $3/2$ il grafico della $f'(x)$ decresce in quanto nello stesso

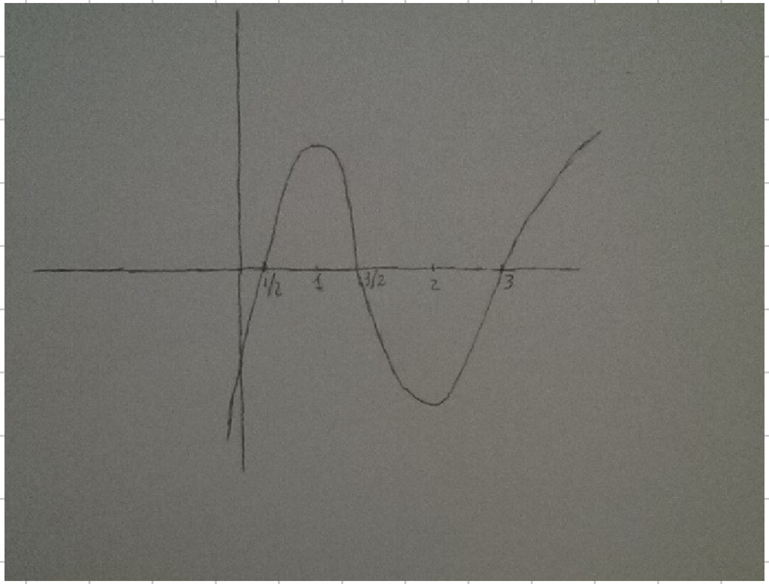
intervallo la $f(x)$ presenta una concavità rivolta verso il basso.

Considerato inoltre che in $3/2$ la $f(x)$ ha pendenza nulla allora il grafico di $f'(x)$ interseca l'asse x in $x = 3/2$

. Si è detto che tra $3/2$ e 3 la $f(x)$ decresce e quindi il grafico di $f'(x)$ sarà negativo e quindi tracciato sotto l'asse delle x.

Inoltre tra $3/2$ e 2 la $f(x)$ presenta ancora una concavità rivolta verso il basso e quindi il grafico di $f'(x)$ sarà negativo e decrescente mentre tra 2 e 3 il grafico $f(x)$ presenta una concavità verso l'alto e quindi il grafico di $f'(x)$ cresce fino ad intersecare l'asse x in $x=3$ (in pratica dove la $f(x)$ ha pendenza nulla).

Infine il grafico $f'(x)$ è sempre crescente.



Esercizio n° 6

La posizione di una particella è data dall'equazione:

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

dove t è misurato in secondi ed s in metri.

a) trovare la velocità al tempo t

b) Qual è la velocità dopo 2 s? e dopo 4 s?

c) Quando la particella è ferma?

a) La funzione velocità è la derivata della funzione posizione.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 3t^2 - 12t + 9$$

b) La velocità dopo 2 s significa la velocità istantanea per $T = 2$

cioè $\rightarrow$ $3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3$ m/s

Di conseguenza la velocità dopo 4 s è di:

$$3(4)^2 - 12(4) + 9 = \cancel{48} - \cancel{48} + 9 = 9 \text{ m/s}$$

c) la particella è ferma quando $v(t) = 0$

cioè $3t^2 - 12t + 9 = 0$

$\Delta = 144 - 108 = 36$

$t_{1,2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{36}}{6} = \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

Quindi la particella è ferma quando $t = 1$ e $t = 3$

Esercizio n° 7

Calcolare :

a) $\int x^3 \ln x \, dx$

b) $\int x e^x \, dx$

a) Si assume $\ln x$ come fattore finito e $x^3 dx$ come fattore differenziale; abbiamo così :

$$\int x^3 \ln x \, dx = \ln x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$$

b) Se assumiamo x come fattore finito ed $e^x dx$ come fattore differenziale si ottiene:

$$\int x\, e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + c$$

Esercizio n° 8

Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x - 3x^2}{x^3 + 1}$$

Sarà:

$$\frac{(1-6x)(x^3+1)-3x^2(x-3x^2)}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^4-2x^3-6x+1}{(x^3+1)^2}$$

Esercizio n° 9

Si risolva in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione fratta:

$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-5x+2} > 0$$

Numeratore:

$x^2 - 4x + 4 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0$

$(x-2)^2 > 0$ é definita su tutto $\mathbb{R}$ escluso in $x = 2$ dove si annulla

Denominatore

$3x^2 - 5x + 2 > 0$

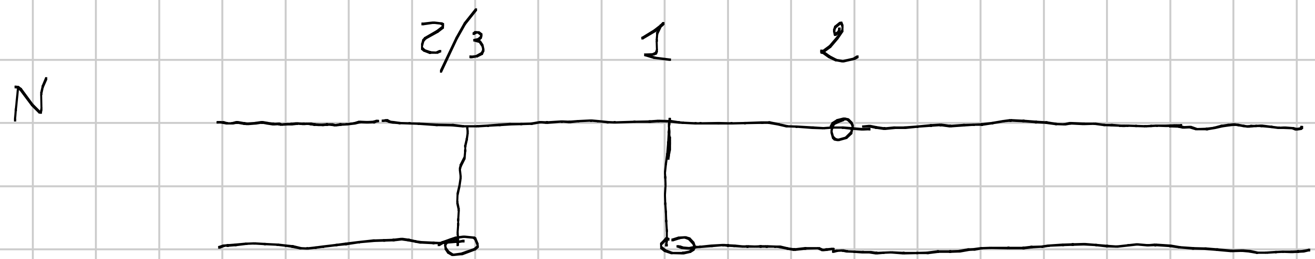
$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Quindi il denominatore è definito per $x < \frac{2}{3}$ e $x > 1$

con $x = 1$ e $x = \frac{2}{3}$ esclusi (in quanto in questi 2 punti si annulla)

Pertanto si ha:



$$\frac{x^2-4x+4}{3x^2-5x+2} > 0 \quad \text{per} \quad x < 2/3 \qquad 1 < x < 2 \qquad x > 2$$

cioè $\left(-\infty ; 2/3\right) \cup \left(1, 2\right) \cup \left(2 ; +\infty\right)$

Esercizio n° 10

Studiare la funzione

$$f(x) = x e^{-x}$$

La funzione può essere espressa in due forme equivalenti:

$f(x) = x e^{-x}$ oppure $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

<u>Dominio</u>: la funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ cioè $(-\infty ; +\infty)$

<u>Studio del segno</u>: $\dfrac{x}{e^x} =$

N: $x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+_0$

D: $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La funzione è positiva nell'intervallo $(0 ; +\infty)$ e negativa in $(-\infty ; 0)$

Limiti agli estremi del Dominio:

$$\lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = (-\infty) e^{-(-\infty)} = -\infty e^{+\infty} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

De L'Hopital

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = (+\infty)(0) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

L'asse x costituisce un asintoto orizzontale per il grafico.

Intersezione con gli assi:

$$\begin{cases} y = x e^{-x} \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il grafico interseca l'asse y in $(0;0)$ ossia nell'origine.

$\begin{cases} y = x e^{-x} \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x e^{-x} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $e^{-x} = 0$ non è mai verificata.

Il grafico interseca l'asse x in $(0;0)$

Ricerca di eventuali asintoti obliqui

Essendo verificata la condizione necessaria $\lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = -\infty$ si

cerca l'eventuale asintoto obliquo sinistro:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{x e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Poichè il limite è infinito non esiste asintoto obliquo sinistro.

D'altro canto essendo $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ non è verificata la condizione necessaria per l'esistenza dell'asintoto obliquo, per cui non esiste nemmeno l'asintoto obliquo destro.

<u>Calcolo della derivata prima</u>:

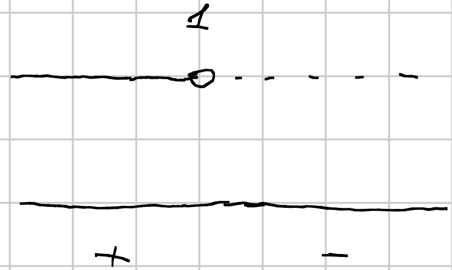
$f'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x} = e^{-x}(1-x)$ $\qquad$ $\text{Dom} f' = (-\infty ; +\infty)$

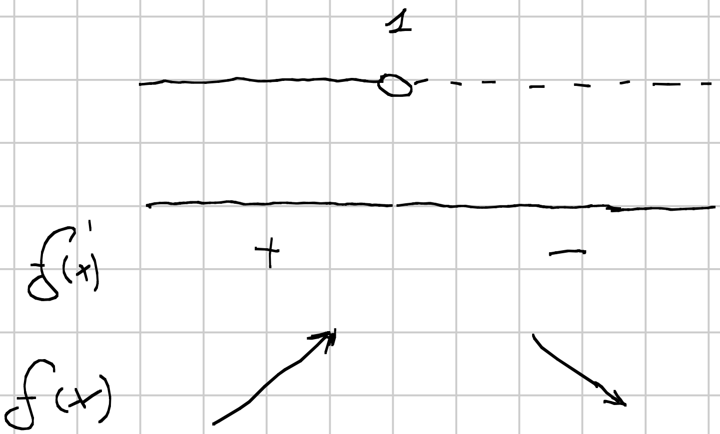
Studio del segno della Derivata prima :

$$e^{-x}(1-x) = \frac{1-x}{e^{x}} > 0$$

N : $1 - x > 0 \quad \forall\, x < 1$

D : $e^{x} > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$





Il grafico è crescente nell'intervallo $(-\infty; 1)$ e decrescente nell'intervallo $(1; +\infty)$. Nel punto $x = 1 \in Df$ si ha un max relativo di ordinata $f(1) = e^{-1}$; quindi $M(1; e^{-1})$

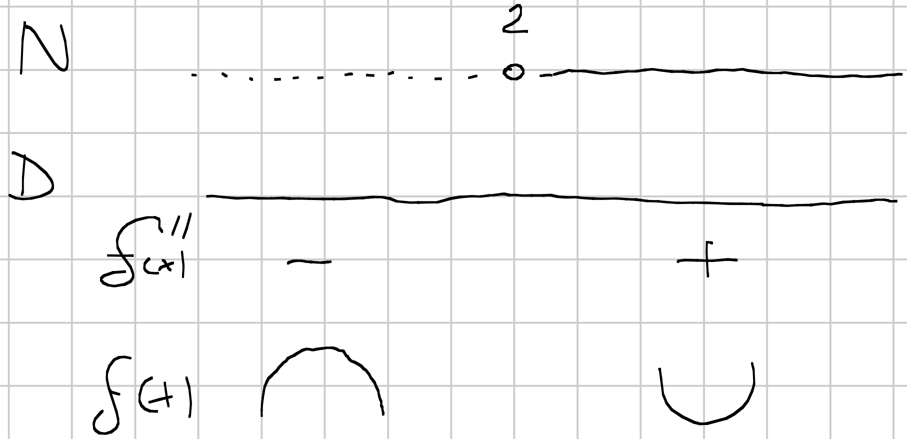
<u>Calcolo della derivata seconda</u>:

$$f''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = e^{-x}(-1+x-1) = e^{-x}(x-2) \qquad Df'' = Df$$

Studio del segno di $f''(x)$

$$\frac{x-2}{e^x} > 0 \qquad N:\ x-2>0 \quad \forall\, x>2$$

$$D:\ e^x>0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$



Il grafico volge la concavità verso il basso nell'intervallo $(-\infty ; 2)$ e verso l'alto nell'intervallo $(2 ; +\infty)$.

Nel punto $x = 2 \in D_f$ si ha un flesso di ordinata $f(2) = 2 \cdot e^{-2}$, per cui si ha $F(2 ; 2e^{-2})$.

<u>Costruzione del grafico</u>: