GEOMETRIA ANALITICA: domande frequenti

- Come si calcola l'equazione di una retta?

Bisogna innanzitutto avere a disposizione due elementi che possono essere:

1.Le coordinate di due punti qualsiasi della retta: allora conviene utilizzare la formula delle retta passante per due punti $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

2.Le coordinate di un punto delle retta e il valore del coefficiente angolare m: allora conviene utilizzare l'equazione della retta passante per un punto, nota come formula del fascio di rette passanti per un punto $y-y_1=m(x-x_1)$;

3.Le coordinate di un punto della retta e la condizione di parallelismo o di perpendicolarità ad un'altra retta: allora si procede come al punto 2 sfruttando le condizioni sul coefficiente angolare di due rette parallele o perpendicolari;

4.Se la retta è parallela ad uno degli assi cartesiani sarà x=k ove k è l'ascissa del punto di intersezione con l'asse delle ascisse, oppure y=h ove h è l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse delle ordinate.

- Come si applica la formula della distanza di un punto da una retta?

La formula è $d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ e per applicarla correttamente innanzitutto bisogna scrivere l'equazione della retta in forma implicita, poi è sufficiente sostituire alle variabili, xo e yo, della formula le coordinate del punto e ad a, b, c i coefficienti dell'equazione della retta .

- Quali sono i due significati (algebrico e geometrico) del coefficiente angolare?

Il coefficiente angolare dal punto di vista algebrico è definito (per una retta non parallela all'asse delle ordinate) come il rapporto costante tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse di una qualsiasi coppia di punti distinti della retta. Lo stesso coefficiente angolare dal punto di vista geometrico è uguale alla tangente trigonometrica dell'angolo formato dalla retta con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

- Quale proprietà caratterizza due punti simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante? e rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante?

Due punti simmetrici rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante hanno coordinate scambiate tra loro ad es: il simmetrico del punto (1; 2) è il punto di coordinate (2;1); due punti simmetrici rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante hanno coordinate scambiate e cambiate di segno ad es. il simmetrico del punto (1; 2) è il punto (-2;-1).

- Che cos'è l'asse di un segmento e di quale proprietà godono i suoi punti? Come si può determinare mediante la geometria analitica?

L'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento condotta per il suo punto medio. I punti dell'asse di un segmento godono della proprietà di essere equidistanti dagli estremi del segmento e per tale motivo l'asse di un segmento si definisce un"luogo geometrico". Mediante la geometria analitica per calcolare l'equazione dell'asse di un segmento dati gli estremi del segmento stesso si deve calcolare il coefficiente angolare della retta che passa per i due punti e quindi il suo antireciproco, occorrono poi le coordinate del punto medio del segmento stesso ed infine basta utilizzare l'equazione del fascio proprio di rette passanti per tale punto con il coefficiente angolare determinato .

- Qual'è il metodo algebrico per determinare l'intersezione di due rette?

Per determinare l'intersezione di due rette il metodo algebrico è quello di risolvere il sistema formato dalle equazioni delle due rette; se il sistema è possibile e determinato allora le due rette sono incidenti e la soluzione del sistema corrisponde alle coordinate del punto di intersezione, se il sistema è indeterminato le due rette hanno infiniti punti in comune quindi sono coincidenti, se il sistema è impossibile le due rette non si incontrano e quindi sono parallele.

- Quali sono le equazioni che esprimono la traslazione di vettore[a,b]?

Se oxy è il primo sistema di riferimento e OXY è il secondo sistema di riferimento ottenuto dalla traslazione dell'origine del primo sistema del vettore di componenti (a,b) che sono anche le coordinate della nuova origine rispetto ad o, le coordinate di un punto P(X,Y) rispetto al secondo sistema di riferimento sono date da X=x-a e Y=y-b.

- Quali sono le condizioni algebriche che esprimono il parallelismo e la perpendicolarità di due rette?

In geometria euclidea due rette si dicono parallele se non si incontrano mai mentre in geometria analitica questa condizione è tradotta nell'uguglianza tra i due coefficienti angolari; per la perpendicolarità due rette si dicono perpendicolari se incontrandosi formano quattro angoli retti mentre in geometria anlitica questa condizione è espressa dai coefficienti angolari che devono essere l'uno l'opposto dell'inverso dell'altro.

- Quale proprietà caratterizza i punti simmetrici rispetto all'asse x? e rispetto all'asse y?

Due punti simmetrici rispetto l'asse delle ascisse hanno uguale ascissa e ordinata opposta mentre due punti simmetrici rispetto all'asse delle ordinate hanno ordinata uguale e ascissa opposta.

- Nella formula del fascio di rette passanti per un punto non è compresa una delle rette del fascio. Quale? Perchè?

Non è compresa l'equazione della retta parallela all'asse delle ordinate perchè non ha coefficiente angolare.

- Come si calcolano i punti notevoli di un triangolo?

ORTOCENTRO: (Punto di incontro delle altezze)Dati i vertici del triangolo si devono determinare le equazioni dei lati (almeno il loro coefficiente angolare con la formula m=(y2-y1)/(x2-x1)) e da ciascuno dei vertici si deve calcolare l'equazione della retta perpendicolare al lato opposto(con la formula del fascio di rette passanti per un punto).Si calcola l'intersezione di due altezze e poi se è richiesto si verifica che anche la terza passa per lo stesso punto.

BARICENTRO(Punto di incontro delle mediane)Si devono calcolare i punti medi dei tre lati del triangolo con la formula del punto medio, poi si utilizza la formula dell'equazione della retta passante per due punti per calcolare le mediane (rette passanti per un vertice e per il punto medio del lato opposto). Infine si calcola l'intersezione di due mediane ed eventualmente si verifica che anche l'altra passa per lo stesso punto.

CIRCOCENTRO(punto d'incontro degli assi dei tre lati): L'asse del segmento è la retta perpendicolare al segmento passante per il suo punto medio quindo è necessario trovare i punti medi dei lati del triangolo ed anche i coefficienti angolari delle rette che contengono i lati così da poter calcolare con la formula del fascio di rette l'equazione della retta passante per il punto medio e perpendicolare al segmento. Quindi come prima si devono determinare l'intersezione di due assi e eventualmente verificare che anche il terzo passa per lo stesso punto.

INCENTRO(Punto d'incontro delle bisettrici) Poichè i punti della bisettrice sono equidistanti dai lati dell'angolo si indicano incognite (x, y) le coordinate dell'incentro e si calcola la distanza (con la formula della distanza di un punto da un retta) dell'incentro da ciascuno dei lati del triangolo. Quindi poichè le didtanze sono tre si eguagliano due a due e si imposta un sistema formato dalle equazioni a valore assoluto che si ottengono. Risolvendo il sistema si ricavano le coordinate x e y dell'incentro.

- Quante e quali condizioni servono per calcolare l'equazione di una parabola?

Nell'equazione della parabola i parametri da determinare sono 3 : a, b, c, quindi occorreno 3 condizioni che possono essere date da:

-il passaggio della parabola per tre punti asseganti;

-il passaggio per due punti di cui uno sia il vertice;

-in alternativa al passaggio per un punto può essere data la condizione di tangenza ad una retta;

-in alternativa alle coordinate del vertice possono essere assegante le coordinate del fuoco o le equazioni della retta direttrice e dell'asse di simmetria.

- Data l'equazione di una parabola, quali sono gli elementi che servono per tracciare il grafico con "sufficiente" precisione?

Bisogna innanzitutto determinare se la parabola presenta delle caratteristiche particolari (vertice sull'asse delle ordinate, passaggio per l'origine degli assi, tangenza all'asse x) quindi determinare il vertice, la concavità e ove esistano le intersezioni con gli assi; in altermativa a queste ultime si può determinare qualche altro punto mediante la sostituzione.

- Come risulta il grafico della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate se:1) b=0, 2)c=0, 3)b=0 e c=0?

1) Se b=0 e a e c sono diversi da zero allora la parabola ha il suo vertice sull'asse delle ordinate nel punto di coordinate (0,c);
2) Se c=0 e a e b sono diversi da zero la parabola passa per l'origine del sistema di riferimento;
3) Se b=0 e c=0 e a è diverso da zero la parabola ha il vertice nell'origine degli assi.

- E' sufficiente conoscere un punto e il vertice per scrivere l'equazione di una parabola?

Si purchè il punto che si conosce sia diverso dal vertice in quanto le condizioni che il vertiche fornisce sono due : il valore dell'ascissa e il passaggio per il punto, e la terza condizione è data dal passaggio per l'ulteriore punto.

- Qual'è la condizione di tangenza tra una retta ed una parabola?

Una retta si dice in generale *tangente* ad una curva se ha un solo punto in comune con la curva (per chi ha conoscenze di analisi la tangente in un punto è la posizione limite della retta secante passante per un secondo punto quando quest'ultimo punto si avvicina al primo); la condizione algebrica che consente di determinare la retta tangente alla parabola è che il discriminante dell'equazione risolvente il sistema dell'intersezione tra la retta e la parabola sia uguale a zero.

- Dimostra che ogni equazione del tipo $y=ax^2+bx+c$ rappresenta una parabola.
- Per scrivre l'equazione di una parabola sono sufficienti due punti?

No, se nessuno dei due è il vertice, in quanto i parametri da determinare nell'equazione della parabola sono 3 e quindi sono anche 3 le condizioni necessarie per determinarli.

- Quali sono le condizioni sui coefficienti a, b, c, affinchè la parabola:1. abbia vertice sull'asse y, 2. abbia vertice sull'asse x, 3.passi per l'origine?

1. Una parabola ha vertice sull'asse delle y se b=0;
2. Una parabola ha vertice sull'asse x è che il discriminante del trinomio di secondo grado sia zero;
3.Una parabola passa per l'origine se c=0.

- Quante e quali condizioni servono per calcolare l'equazione di una circonferenza?

Per scrivere l'equazione della circonferenza servono, come per la parabola, tre condizioni in analogia al fatto che anche l'equazione della circonferenza contiene tre parametri a, b, c. Queste tre condizioni possono essere date da:

-le due coordinate del centro e la lunghezza del raggio;

-il passaggio per tre punti;

-il passaggio per due punti che siano gli estremi del diametro;

-in alternativa ad un punto può essere assegnata la condizione di tangenza ad una retta.

- Data l'equazione di una circonferenza, quali sono gli elementi che servono per tracciare il grafico con "sufficiente" precisione?

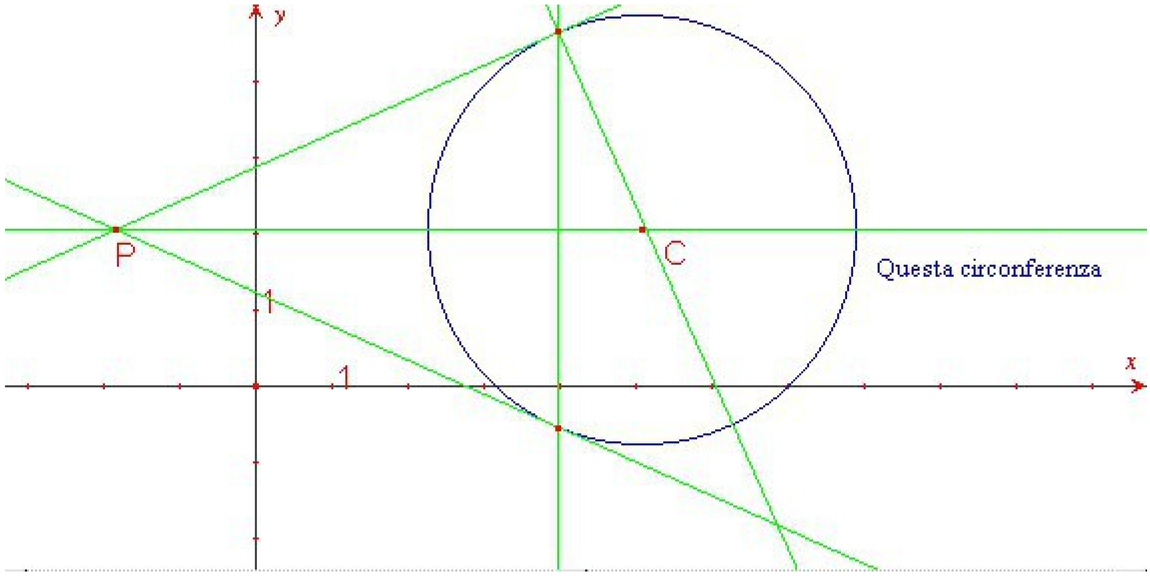
Occorre stabilire le coordinate del centro e la lunghezza del raggio; quindi dipende dall'equazione che viene data perchè se è quella in cui sono indicati questi elementi allorà si può gia disegnare, altrimenti se si ha l'equazione cartesiana bisogna prima ricavare le coordinate del centro e la lunghezza del raggio, poi la si può disegnare.

- Per scrivere l'equazione della circonferenza passante per 3 punti non allineati esistono almeno 2 metodi.Descrivili.

Un primo metodo un po' laborioso consiste nell'imporre che la circonferenza passi per i 3 punti sostituendone le coordinate nell'equazione ed impostando e risolvevdo il sistema di tre equazioni in tre incognite che ne risulta. Un secondo metodo più semplice come calcolo è quello di ricordare che la circonferenza è l'insieme dei punti del piano equidistanti da un punto interno detto Centro e che il Centro è il punto d'incontro degli assi di due dei tre segmenti che si ottengono congiungendo i punti a due a due (circocentro del triangolo).; quindi si devono calcolare i due assi e quindi l'intersezione delle due rette e così si determina il cento e la misura del raggio basta calcolarla come distanza di due punti: il centro e uno dei tre punti dati.

- Se da un punto esterno P ad una circonferenza si conducono le rette tangenti alla circonferenza, nel punto di contatto com'è il raggio rispetto alle tangenti?Unendo i punti di contatto come sono rispettivamente la corda e la retta che unisce P al centro della circonferenza?

Il raggio nel punto di contatto è perpendicolare alla retta tangente e unendo i punti di contatto si ottiene una corda di cui la retta che unisce il punto P con il centro della circonferenza è l'asse.



- Qual'è la condizione sui coefficienti della circonferenza a, b, c, affinchè la circonferenza abbia il centro sull'asse x? E se deve essere tangente all'asse y com'è la circonferenza?

Il centro della circonferenza di cui è data l'equazione cartesiana $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si trova sull'asse delle ascisse se b=0, se poi dev'essere tangente anche all'asse y allora deve passare necessariamente anche per l'origine quindi dev'essere anche c=0.

- Quante sono le circonferenze tangenti ad entrambi gli assi cartesiani e aventi il centro su una retta assegnata?

Le circonferenze richieste sono solo due in quanto il loro centro deve trovarsi alla stessa distanza da entrambi gli assi cartesiani e quindi deve appartenere ad una delle due bisettrici dei quadranti y=x oppure y=-x .

- Un'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ rappresenta sempre una circonferenza? Perchè?

No , non rappresenta sempre una circonferenza reale in quanto osservando tra le formule $x_0=\frac{-a}{2}, y_0=\frac{-b}{2}, r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}$ quella per il calcolo del raggio è richiede l'estrazione di una radice quadrata che è possibile solo se il radicando è positivo o nullo (in quest'ultimo caso la circonferenza degenare in un punto, il suo centro), in caso contrario l'equazione non rappresenta una circonferenza.

- Se un punto è esterno ad una circonferenza quante tangenti si possono mandare dal punto alla circonferenza? E se il punto si trova sulla circonferenza? E se il punto è interno?

Da un punto esterno ad una circonferenza si possono condurre due rette tangenti, da un punto della circonferenza si può condurre una sola tangente e da un punto interno non si possono condurre rette tangenti ma solo rette secanti.

- Qual'è la condizione sui coefficienti a, b, c, affinchè la circonferenza abbia il centro sull'asse y? E se deve anche essere tangente all'asse x com'è la circonferenza?

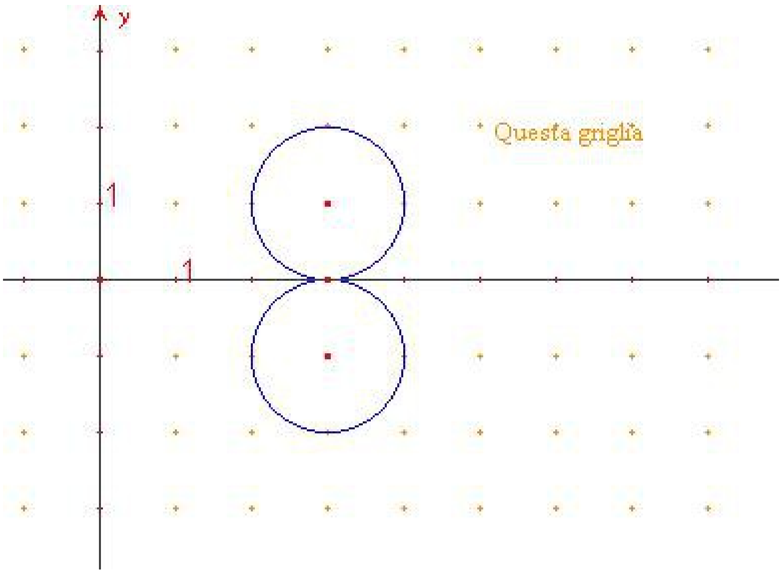
Il centro della circonferenza di cui è data l'equazione cartesiana $x^2+y^2+ax+by+c=0$ si trova sull'asse delle ordinate se a=0, se poi dev'essere tangente anche all'asse x allora deve passare necessariamente anche per l'origine quindi dev'essere anche c=0.

- Per scrivere l'equazione della circonferenza è sufficiente conoscere le coordinate degli estremi del diametro? Perchè?

Si perchè dagli estremi del diametro si può risalire alle coordinate del centro che ne è il punto medio e al raggio la cui misura è la metà di quella del diametro.

- Quante sono le circonferenze tangenti all'asse x in un punto e di raggio asseganto?

Sono due, quella sopra e quella sotto l'asse x.



- Come si calcola l'quazione cartesiana dell'ellisse conoscendo uno dei due semiassi e le coordinate di un fuoco?

Conoscendo un semiasse e il fuoco si può calcolare l'altro semiasse e quindi scrivere l'equazione sostituendo al posto di a e b i due semiassi.

- Come si calcola l'equazione cartesiana dell'ellisse conoscendo due punti qualsiasi (non simmetrici) per cui passa l'ellisse?

Così come per le altre curve si impone il passaggio per i due punti cioè si sostituiscono le coordinate dei due punti all'equazione dell'ellisse e si risolve il sistema avente come incognite a e b.

- Come si definisce l'ellisse come luogo geometrico?

L'ellisse è il luogo geometrico di tutti e soli i punti del piano che godono della proprietà di avere la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi uguale ad un valore costante ; tale costante nell'equazione corrisponde a 2a.

- Conosci qualche applicazione dell'ellisse alla fisica?

La prima legge di Keplero sulle orbite dei pianeti attorno al sole: "Tutti i pianeti descrivono attorno al sole delle orbite che hanno la forma di una ellisse di cui il sole è uno dei fuochi, comune a tutte le ellissi".
Poichè in un'ellisse qualsiasi raggio luminoso o acustico che passi per un fuoco viene riflesso nell'eltro fuoco questa proprietà geometrica viene sfruttata sia nella costruzione degli specchi ellittici che nella costruzione di teatri a pianta ellittica(ad es. l'Arena di Verona).
Un curiosità: per tracciare con una cordicelle un'ellisse si può usare il cosiddetto "metodo del giardiniere" che consiste nel fissare la cordicella a due punti fissi (i fuochi), e tracciare la curva che si ottiene mantenendo la cordicella ben tesa.

- Come si definisce l'iperbole come luogo geometrico?

L'iperbole è il luogo geometrico di tutti e soli i punti del piano che godono della proprietà di avere la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi uguale ad un valore costante .

- Conosci qualche applicazione fisica o economica dell'iperbole?

Le leggi fisiche ed economiche che vengono rappresentate da un ramo di iperbole equilatera sono diverse in quanto tale grafico rappresenta anche l'equazione di due grandezze legate tra loro da una legge di proporzionalità inversa; alcune sono:
In fisica la legge do Boyle che lega la pressione ed il volume di una gas mantenuto a temperatura costante:

$$p*V=k.$$

In matematica finanziaria la legge del calcolo degli interessi nel regime di capitalizzazione composta $I=C*i*t$ a parità di tempo esprime la proporzionalità inversa tra il Capitale e il tasso di interesse i.
In economia sono espresse da rami di iperbole, anche se non sempre equilatera, le leggi che esprimono il costo unitario per la produzione di un bene e la funzione domanda di una merce rispetto al prezzo. Nelle applicazioni più avanzate sono iperboli anche la funzione di utilità del consumatore e la funzione di produzione di un'impresa.
Sistemi di radionavigazione a differenza di tempo o di fase : questi sistemi, essenzialmente il LORAN e il Decca, permettono di stabilire la posizione del navigante (marino o aereo) misurando la differenza di tempo (LORAN) o fase (Decca) con la quale arrivano al ricevitore di bordo due segnali trasmessi in sincronia da due stazioni distanti fra loro. La misura di una differenza di tempo o di fase, per la definizione geometrica di iperbole come luogo di punti con uguale differenza di distanza da due punti detti fuochi, dà luogo ad un ramo di iperbole di posizione. L'intersezione di due iperboli, conoscendo la posizione dei fuochi, definisce un punto.

- Come si calcolano le equazioni degli asintoti dell'iperbole nell'equazione riferita agli assi cartesiani?

Gli asintoti dell'iperbole dall'equazione riferita agli assi cartesiani si ricavano molto semplicemente scomponendo la differenza dei due quadrati che si trova al primo membro dell'equazione e ponendo ciascuna fattore uguale a zero.

- Quanti tipi di equazioni di iperbole equilatera conosci?

Le più note sono due: xy=k e anche se vi sono poi le equazioni delle iperboli equilatere ottenute per traslazione dalla prima delle due equazioni che prendono snche il nome di funzioni omografiche $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

- Che differenza c'è tra l'iperole equilatera e qualla non equilatera?

L'iperbole equilatera ha gli asintoti perpendicolari, quella non equilatera ha asintoti non perpendicolari

- Come si scrive l'equazione dell'iperbole equilatera conoscendo le coordinate di uno dei due fuochi e uno dei due semiassi?

In questo caso a=b quindi da c ( ) si possono ricavare entrambi .

- Come si scrive l'equazione dell'iperbole se si conoscono due suoi punti qualsiasi? e se l'iperbole è equilatera , quante condizioni servono?

Se si conoscono due punti qualsiasi, purchè non simmetrici basta sostituirli e procedere come per l'ellisse , mentre se l'iperbole è equilatera basta una condizione e quindi basta sostituire le coordinate di un punto noto a x e y e risolvere l'equazione con incognita k.

- Che valori assume l'eccentricità nell'ellisse?

Poichè e=c/a e nell'ellisse c<a la sua eccentricità è un numero compreso tra 0 e 1: tanto più l'eccenricità si avvicina a 1 tanto più l'ellisse è schiacciata verso l'asse x e tanto più è vicina a zero tanto più l'ellisse tende a diventare una circonferenza.

- Che valori assume l'eccentricità nell'iperbole?

Poichè e=c/a e nell'iperbole c>a la sua eccentricità è un numero maggiore di 1: tanto più l'eccentricità si avvicina a 1 tanto più l'iperbole è schiacciata verso l'asse x e tanto più aumenta l'eccentricità tanto più l'iperbole si allontana dall'asse x e tende ad allinearsi su due rette parallele verticali.