Il Metodo Grafico

Indice

Metodo grafico

In matematica, data un'equazione della forma $f(x) = 0$, il *metodo grafico* è un procedimento di calcolo che ha il fine di *determinare intervalli della retta reale che contengono una sola radice*. I casi tipici in cui si usa questo metodo sono quelli in cui la funzione da studiare non si riduce ad un polinomio di grado inferiore al quarto (altrimenti infatti sono noti metodi diretti di calcolo algebrico delle soluzioni) ma risulta abbastanza dominabile con gli strumenti del calcolo infinitesimale e del calcolo numerico. La *ricerca delle radici* dell'equazione data equivale alla determinazione degli zeri della funzione $y = f(x)$ (ricerca delle intersezioni del grafico della funzione con l'asse delle ascisse). La determinazione di tali intervalli è il primo passo da compiere per poter applicare un metodo approssimato per il calcolo della radice in un intervallo predeterminato. Per determinare gli intervalli che contengono una soluzione dell'equazione è utile cercare di tracciare il grafico approssimato della funzione utilizzando gli strumenti noti dall'analisi matematica per lo studio delle funzioni (o più semplicemente servendosi dell'aiuto di un calcolatore tracciando su un piano cartesiano ortogonale la spezzata unione dei punti $P_i(x_i,y_i)$ nella quale ogni punto appartiene al luogo geometrico della curva $y = f(x)$ ottenuto assegnando un insieme di valori x_i alla variabile indipendente x e calcolando i corrispondenti valori y_i della variabile dipendente y).

Metodo grafico applicato alla circonferenza.

Avendo già chiare le definizioni di circonferenza e la sua risoluzione algebrica, possiamo applicare il metodo grafico per avere una sua diversa risoluzione. Analizziamo il seguente esempio:

Risolvere graficamente l'equazione irrazionale $\sqrt{25-x^2} + 2x - 10 = 0$

che si può scrivere nella forma: $\sqrt{25-x^2} = -2x + 10$ (2)

Risolvere graficamente tale equazione significa risolvere graficamente il sistema

$y = \sqrt{25-x^2}$ (3)

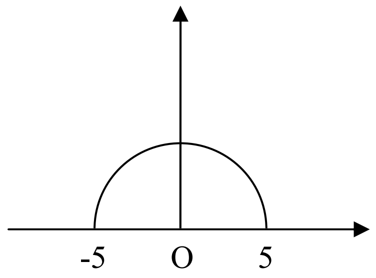
$y = -2x + 10$ (4)

Si tratta quindi di determinare gli eventuali punti di intersezione tra a curva di equazione (3) e la retta di equazione (4). Le soluzioni della (2) saranno le ascisse di tali punti di intersezione.

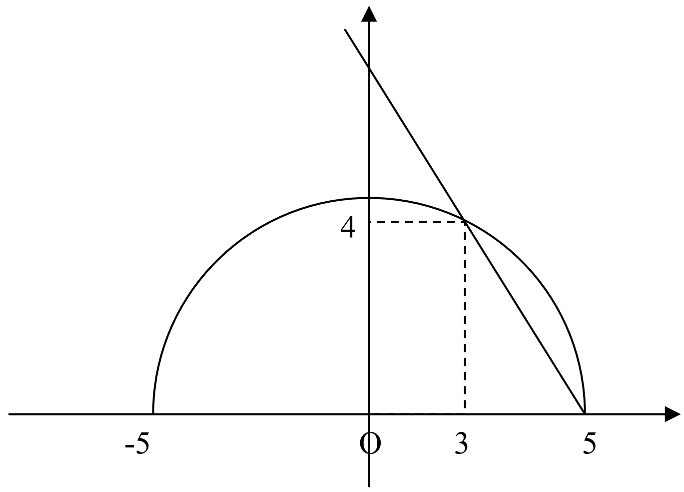
Per rappresentare la (3) dobbiamo elevare entrambi i membri della stessa al quadrato dopo aver trovato il campo di esistenza. In seguito poi procederemo con la rappresentazione

Algoritmo risolutivo:

1) Troviamo il Campo di esistenza ponendo il radicando ≥ 0 : otterrò $25 - x^2 \geq 0$ quindi $-5 \leq x \leq 5$; inoltre deve essere $y \geq 0$
2) Poniamo entrambi i termini al quadrato ottenendo $x^2 - y^2 = 25$ che da quanto studiato equivale all'equazione di una circonferenza con centro nell'origine degli assi e raggio di misura 5, i cui punti giacciono nel semipiano delle ordinate positive o nulle (poiché $y \geq 0$).
3) Facciamo il grafico della circonferenza.



4) Disegniamo ora la retta di equazione: y = -2x + 10 nel grafico, essa passerà per P(3;4)



Dall'esame della figura si conclude che l'equazione proposta è soddisfatta per x = 3 e x = 5 (come si può anche verificare dopo aver risolto il problema).

Possiamo applicare lo stesso metodo anche alle disequazioni irrazionali, come mostriamo con il seguente esempio.

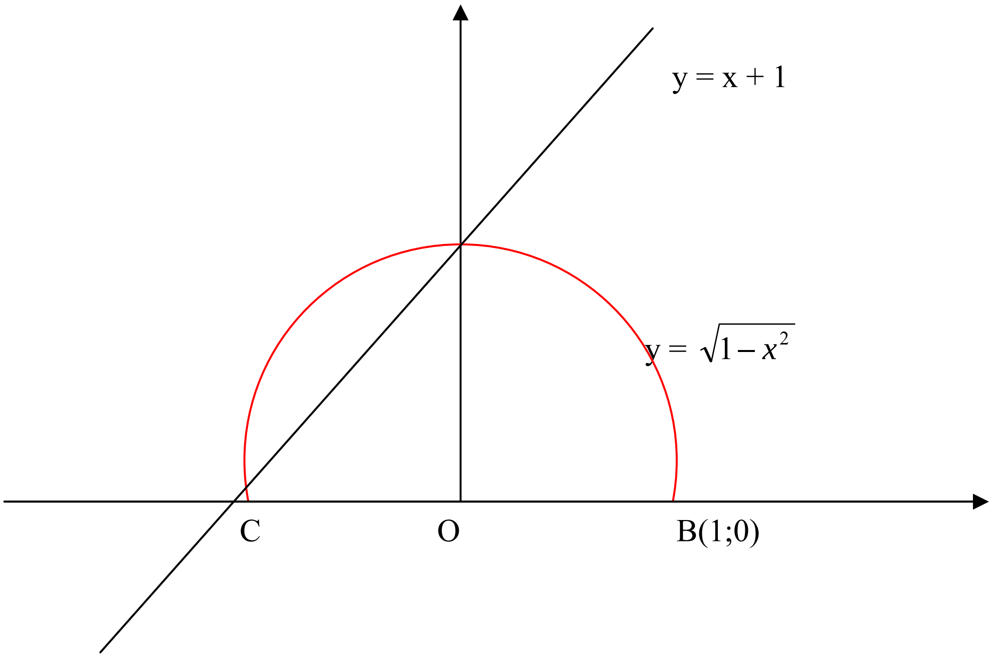
Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{1-x^2} < x + 1$

Occorre rappresentare graficamente le funzioni

$y = \sqrt{1-x^2}$ (1) e $y = x + 1$ (2)

Il grafico della (1) è la semicirconferenza indicata in figura e il grafico della (2) è la retta disegnata nella stessa figura. Risolvere graficamente la disequazione data equivale a determinare la ascisse dei punti della semicirconferenza che hanno ordinata minore di quella dei corrispondenti punti di uguale ascissa della retta (in altre parole essendo $\sqrt{1-x^2}$ < x + 1 dobbiamo determinare nel grafico dove la semicirconferenza (1) è più bassa della retta (2)).

Dallo studio del grafico si vede che i punti dell'arco AB, A escluso e B incluso, soddisfano la condizione richiesta: deve essere quindi $0 < x \leq 1$.



Metodo grafico applicato alla parabola.

Avendo già chiare le definizioni di parabola e la sua risoluzione algebrica, possiamo applicare il metodo grafico per avere una sua diversa risoluzione.

Vediamo ora insieme come si possono rappresentare alcune particolari curve per il cui studio è necessario ricorrere al grafico di una parabola.

Tracciare il grafico delle funzioni di equazione $y = \sqrt{x}$ e $y = \sqrt{x-2} + 3$

La funzione $y = \sqrt{x}$ è definita per $x \geq 0$ e i valori di y risultano positivi o nulli: $y \geq 0$. Pertanto avremo

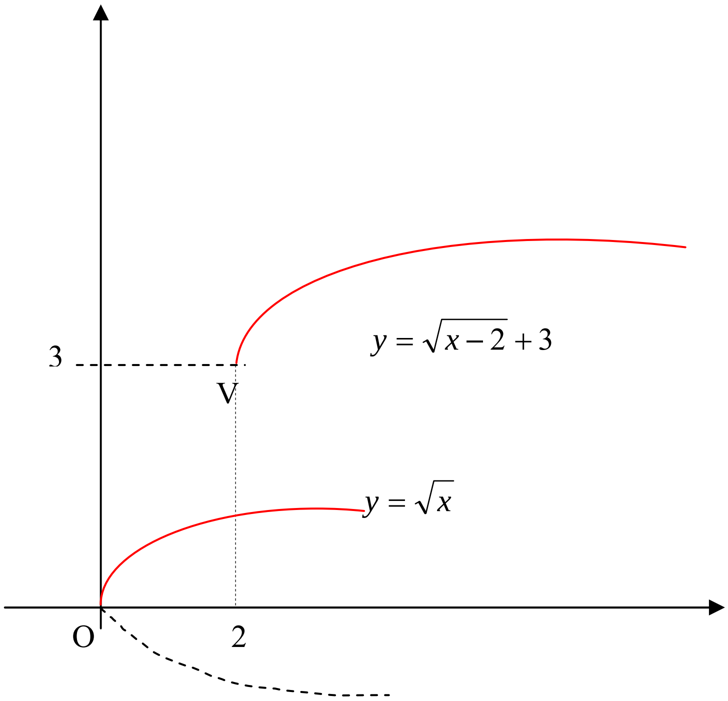
$$y = \sqrt{x} \longrightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ma $x = y^2$ è l'equazione della parabola che ha vertice nell'origine e asse coincidente con l'asse x e pertanto il grafico della funzione data sarà costituito dai punti della parabola che soddisfano la condizione $y \geq 0$ (cioè dai punti che appartengono al semipiano delle ordinate positive o nulle).
Per tracciare il grafico dell'altra funzione osserviamo che essa esiste per $x \geq 2$ e per $y \geq 3$.

$$y = \sqrt{x-2} + 3 \longrightarrow y - 3 = \sqrt{x-2} \longrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ (y-3)^2 = x - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ x = y^2 - 6y + 11 \end{cases}$$

Poiché l'ultima equazione scritta rappresenta una parabola avente vertice in V(2;3) e per asse di simmetria la retta di equazione y = 3, si po' dedurre che il grafico voluto è costituito dalla semiparabola che appartiene al semipiano delle ordinate maggiori o uguali a 3.

Osservazione: Possiamo anche osservare che le due curve studiate sono congruenti e che la seconda si può ottenere sottoponendo i punti della prima a una traslazione di vettore $\vec{v} = (2;3)$



Risoluzione grafica di equazioni irrazionali.

Risolvere graficamente la seguente equazione irrazionale: $\sqrt{2-x} = 2x - 1$

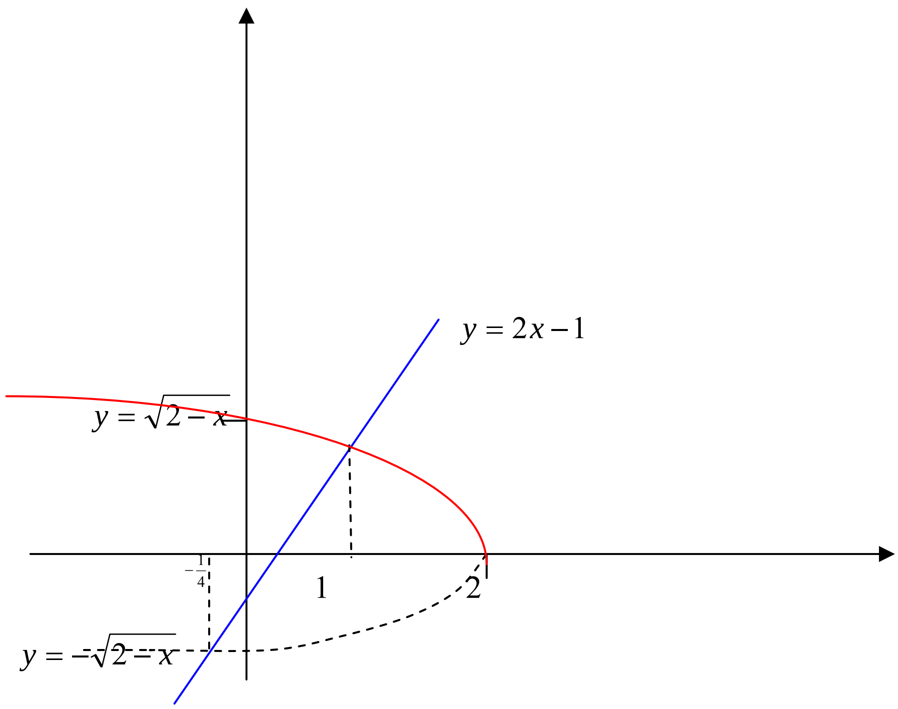
Risolvere graficamente l'equazione data significa risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2-x} & (1) \\ y = 2x - 1 & (2) \end{cases}$$

ossia determinare gi eventuali punti di intersezione della curva di equazione (1) con la retta di equazione (2). Le soluzioni dell'equazione data saranno le ascisse di tali punti di intersezione. Osserviamo che:

$$y = \sqrt{2-x} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 2 - x \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y^2 + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Se ne deduce che il grafico della (1) è costituito dai punti della parabola di equazione x= y^2 + 2 che appartengono al semipiano delle ordinate positive o nulle. La parabola ha vertice nel punto V(2;0) e asse di simmetria coincidente con l'asse x . Dopo aver disegnato anche la retta y = 2x – 1 si può notare che le due curve, nel semipiano y ≥ 0, si intersecano pel punto P(1;1) e quindi x=1 è la soluzione dell'equazione proposta. In questo caso le coordinate di P sono facilmente determinabili graficamente. In generale, per determinare le coordinate di P, si dovrà risolvere l'equazione algebricamente.



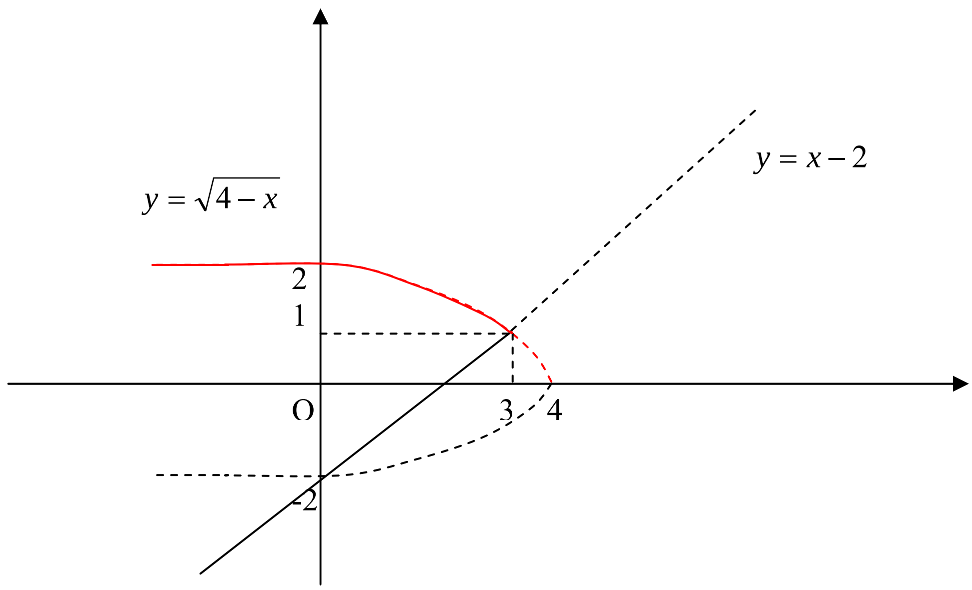
Risoluzione grafica di disequazioni irrazionali.

Risolvere per via grafica la disequazione $\sqrt{4-x} = x-2$

Occorre considerare la retta di equazione y = x-2 e la semiparabola di equazione y = $\sqrt{4-x}$. Per ottenere il grafico di y = $\sqrt{4-x}$ si procede come negli esempi svolti precedentemente:

$$y = \sqrt{4-x} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 4-x \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -y^2+4 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

osservando che la parabola x = $-y^2 + 4$ ha vertice in V(4;0) e asse di simmetria coincidente con l'asse x . A causa della condizione y ≥ 0, l'equazione y = $\sqrt{4-x}$ rappresenta la parte di parabola appartenente al semipiano delle ordinate positive o nulle. Risolvere la disequazione data significa determinare le ascisse dei punti della semiparabola che hanno le ordinata maggiore dell'ordinata dei punti corrispondenti della retta determinare, cioè, le ascisse dei punti che "stanno sopra" a quelli dea retta: si vede quindi che la disequazione proposta è soddisfatta per **x < 3**.



Metodo grafico applicato all'ellisse.

Avendo già chiare le definizioni di ellisse e la sua risoluzione algebrica, possiamo applicare il metodo grafico per avere una sua diversa risoluzione. Analizziamo il seguente esempio:

1) Tracciare il grafico della funzione $y = \sqrt{4-9x^2}$ determinandone dominio e codominio.

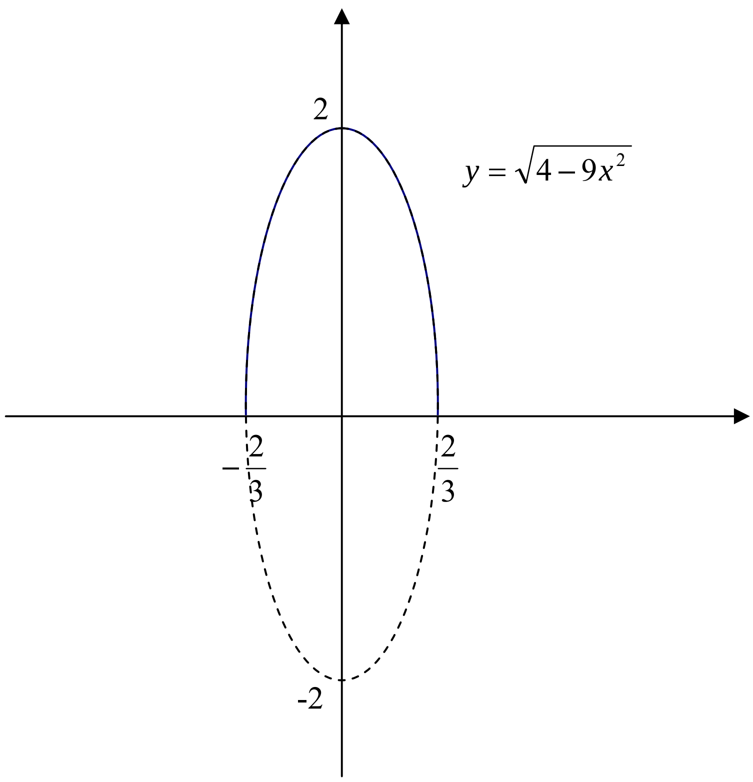
La funzione esiste se $4 - 9x^2 \geq 0 \rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \rightarrow D = \left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$.

Si osservi che, $\forall x \in D$ è $y \geq 0$.

Elevando al quadrato, avremo che l'equazione data è equivalente a

$$\begin{cases} y^2 = 4-9x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{4}{9}} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Poiché la (1) è l'equazione di un'ellisse riferita al centro e agli assi con $a = \frac{2}{3}$ e $b = 2$, tenendo conto della condizione $y \geq 0$, si può concludere che il grafico richiesto è quello in figura e rappresenta una semiellisse. Il codominio della funzione è $C = [0;2]$.



2) Risolvere graficamente la disequazione: $\sqrt{2x-3x^2} \geq x$

Consideriamo la curva e la retta di equazione rispettivamente $y=\sqrt{2x-3x^2}$ e $y = x$.
Osserviamo che

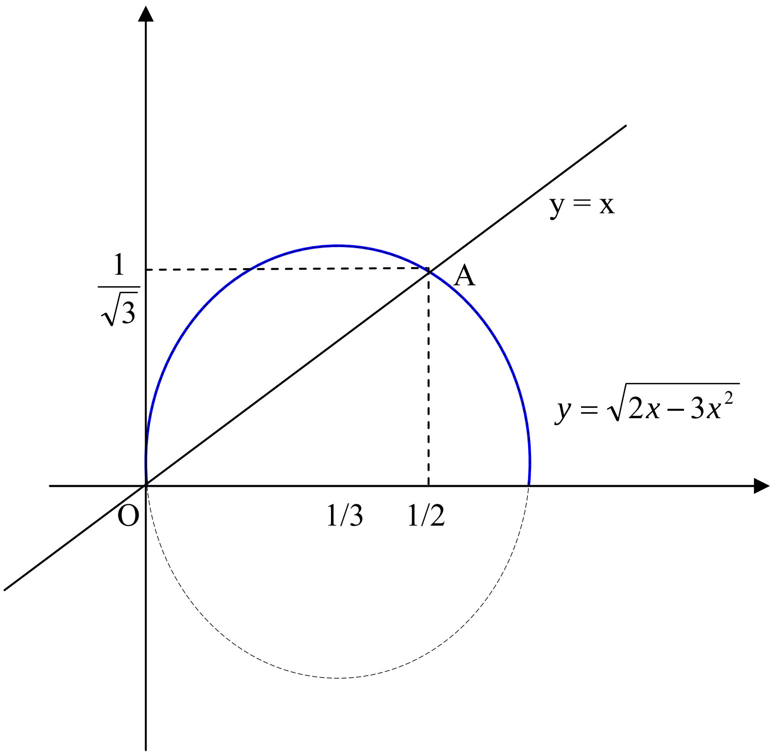
$$y=\sqrt{2x-3x^2} \rightarrow \begin{cases} y^2 = 2x-3x \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2+y^2-2x=0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

L'equazione $3x^2 + y^2 - 2x = 0$ si può scrivere come

$$\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{9}}+\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$$

e pertanto rappresenta un'ellisse di centro $\left(\frac{1}{3};0\right)$ e di semiassi $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ con l'asse minore disposto sull'asse x, essendo $a < b$. A causa della condizione $y \geq 0$, l'equazione $y=\sqrt{2x-3x^2}$ rappresenta quindi la semiellisse appartenente al semipiano delle ordinate positive o nulle. Risolvere a disequazione data significa determinare le ascisse dei punti delle semiellisse che hanno ordinata maggiore o uguale di quella dei corrispondenti punti della retta $y = x$. Dall'esame della figura si può vedere che la disequazione è verificata per $0 \leq x \leq x_A$ essendo A il punto di intersezione, distinto dall'origine tra l'ellisse e la retta. Ponendo a sistema l'equazione dell'ellisse con quella della retta si trova $x_A = ½$.

Concludiamo che la disequazione è soddisfatta per $\mathbf{0 \leq x \leq ½}$.



Metodo grafico applicato all'iperbole.

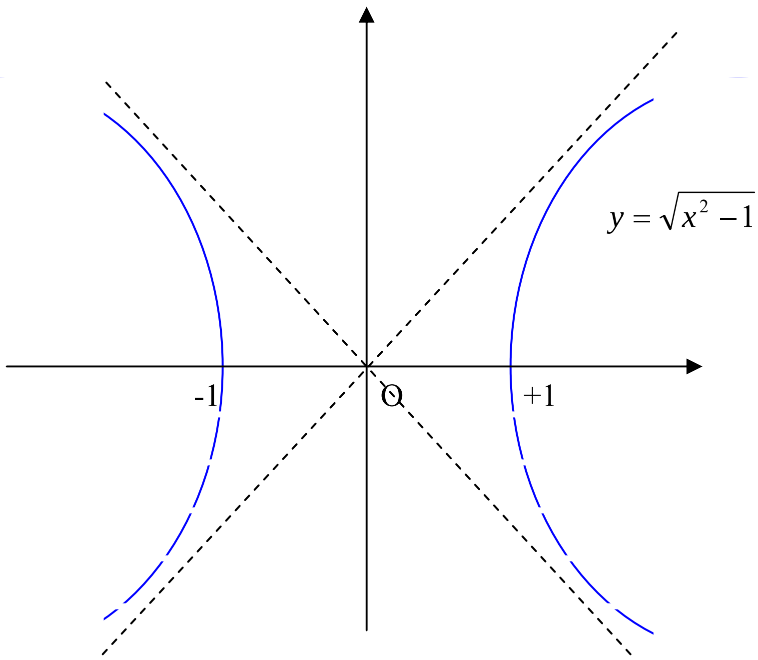
Avendo già chiare le definizioni dell'iperbole e la sua risoluzione algebrica, possiamo applicare il metodo grafico per avere una sua diversa risoluzione. Analizziamo i seguenti esempi:

1) Tracciare il grafico della funzione $y = \sqrt{x^2 - 1}$ determinandone dominio e codominio.

La funzione è definita per $x^2 - 1 \geq 0$. Il dominio è dunque D = $(-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$. Poiché è y ≥ 0 per ogni $x \in D$, si ha:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \rightarrow \begin{cases} y^2 = x^2 - 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

L'equazione $x^2 - y^2 = 1$ è rappresentata, nel piano cartesiano, da un'iperbole equilatera riferita al centro e agli assi avente l'asse x come asse trasverso e le rette y = ± x come asintoti. Poiché deve essere y ≥ 0, il grafico della funzione data sarà costituito dai punti dell'iperbole che appartengono al semipiano delle ordinate positive o nulle (vedi figura). Il codominio è $C = R_0^+ = [0;+\infty)$



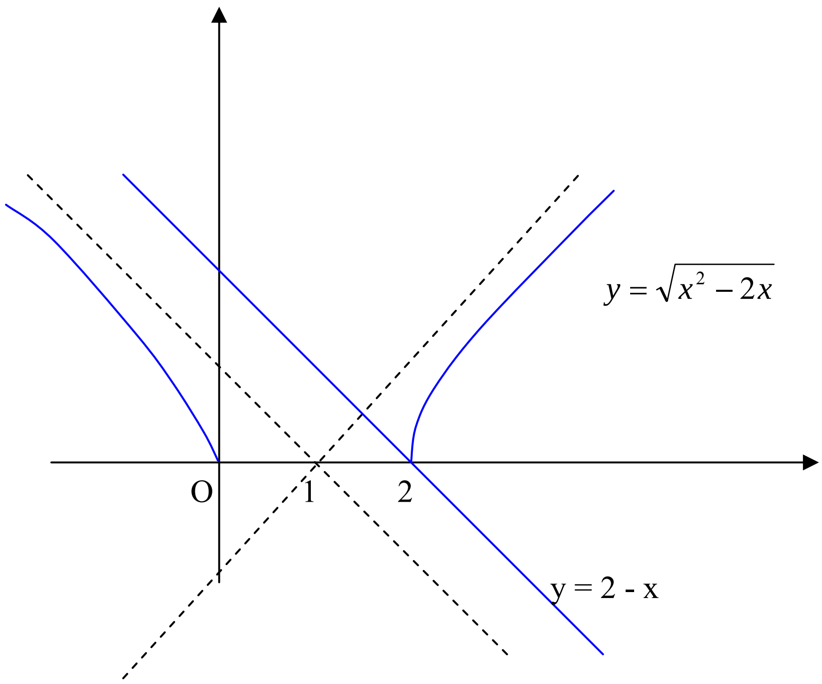
2) Risolvere graficamente l'equazione $\sqrt{x^2 - 2x} = 2 - x$.

L'equazione data è equivalente al sistema $\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 2x} & (1) \\ y = 2 - x & (2) \end{cases}$

Si tratta quindi di intersecare i luoghi di equazione (1) e (2): le ascisse degli eventuali punti di intersezione saranno le soluzioni dell'equazione proposta. Per tracciare il grafico della (1) osserviamo che:

$$y=\sqrt{x^2-2x}\rightarrow\begin{cases}y^2=x^2-2x\\ y\geq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(x^2-2x+1\right)-y^2=1\\ y\geq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(x-1)^2-y^2=1\\ y\geq 0\end{cases}$$

L'equazione (1) rappresenta quindi la parte di iperbole equilatera di equazione $(x-1)^2-y^2=1$ appartenente al semipiano delle ordinate positive o nulle. Rappresentando nel piano cartesiano la (1) e la (2) e osservando che la retta $y = 2-x$ è parallela a uno degli asintoti della curva si vede in figura che l'equazione proposta ha per unica soluzione $x = 2$.



3)Risolvere graficamente la disequazione $\sqrt{x^2-2x}\leq 2-x$.

Utilizzando la figura del precedente esempio dove sono stati rappresentati i grafici della funzione $y_1=\sqrt{x^2-2x}$ e $y_2 = 2-x$. Risolvere graficamente la disequazione significa stabilire per quali valori di x i punti si trovano al di sotto dei corrispondenti punti di uguale ascissa del grafico di y_2 o coincidono con essi. Dall'esame della figura del precedente esempio si deduce che la disequazione data è verificata per $x \leq 0 \quad V \quad x = 2$.

Discussione algebrica delle equazioni parametriche di secondo grado

Metodo diretto.

Sia data un'equazione parametrica di secondo grado

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

nella quale, cioè, i coefficienti a,b,c siano (tutti o in parte) funzioni di un parametro reale. Evidentemente anche le soluzioni x_1 e x_2 dell'equazione risulteranno, di solito, funzioni del parametro. Generalmente tali radici sono sottoposte a condizioni tipo $x < \alpha$ oppure $\alpha < x < \beta$, ecc. Il metodo diretto consiste nel ricavare le radici reali dell'equazione e nel confrontarle con le limitazioni assegnate all'incognita; si dovranno così risolvere disequazioni o sistemi di disequazioni in cui l'incognita è il parametro. E' utile applicare tale metodo quando l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$

è incompleta oppure quando il suo discriminante o è un quadrato perfetto o non dipende dal parametro.

Vediamo ora insieme un esempio:

1) Determinare i valori del parametro reale k in modo che una o entrambe le radici dell'equazione

$x^2 - (2k - 5)x = 0$ (2)

soddisfino la condizione $-1 < x < 3$.

L'equazione (2) è spuria e ammette le radici $x_1 = 0$ e $x_2 = 2k - 5$; poiché si ha $-1 < 0 < 3$, la soluzione $x_1 = 0$ è accettabile qualsiasi sia il valore di k. Affinché anche $x_2 = 2k - 5$ sia accettabile, dovrà verificarsi $-1 < 2k - 1 < 3$, cioè

$$\begin{cases} 2k-5>-1 \\ 2k-5<3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2k>4 \\ 2k<8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k>2 \\ k<4 \end{cases} \rightarrow 2<k<4$$

Concluderemo così che

Per $2 < k < 4$ L'equazione ammette due soluzioni soddisfacenti le limitazioni poste (sono infatti accettabili sia x_1 che x_2)

Per $k \leq 2 \vee k \geq 4$ l'equazione ammette una sola soluzione accettabile (infatti, in questo caso, solo $x_1 = 0$ è accettabile). Si noti che per $k = 2$ è $x_1 = -1$ e per $k = 4$ è $x_2 = 3$.

Metodi indiretti.

In generale, i metodi indiretti sono quelli che permettono in confronto delle radici dell'equazione, con uno o più numeri dati, senza risolvere l'equazione data.

Il Metodo di Cartesio.

Il metodo di Cartesio è un metodo indiretto di discussione che si applica per discutere un'equazione parametrica di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, per la quale l'*unica limitazione per l'incognita riguardi un confronto con il numero 0* , vale a dire quando l'unica condizione posta all'incognita è del tipo $x > 0; x < 0; x \geq 0; x \leq 0$.

Ricordiamo la regola di Cartesio: " se le radici di un'equazione di secondo grado sono reali, a ogni variazione di segni dei coefficienti corrisponde una radice positiva e a ogni permanenza dai segni una radice negativa. Quando le radici sono discordi, quella di valore assoluto maggiore è positiva se la variazione precede la permanenza, è negative se la permanenza precede la variazione". Si dovranno dunque considerare e analizzare le disequazioni:

$\Delta \geq 0$;
$a > 0$
$b > 0$
$c > 0$

E dedurre i segni delle radici reali dalle variazioni e permanenze che presentano i coefficienti dell'equazione. Chiariamo il concetto con il seguente esempio:

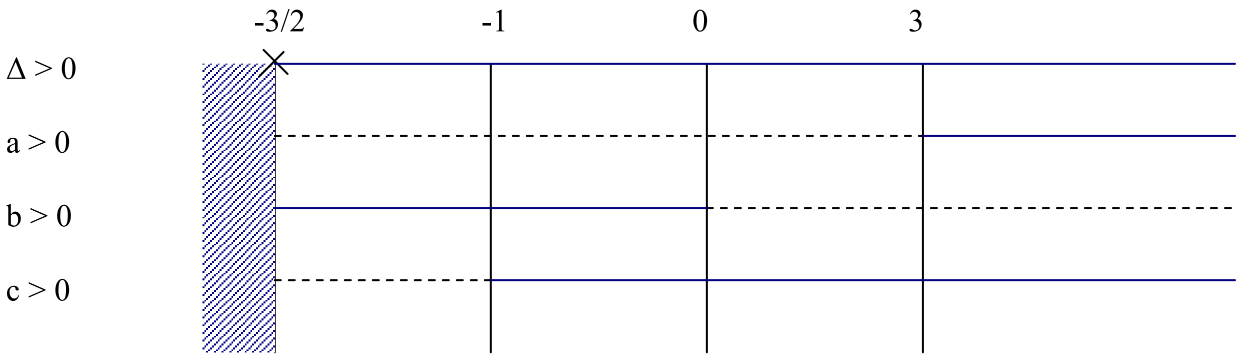
Si vogliano determinare i valori del parametro a, affinché sia $x \geq 0$, nell'equazione
$(a-3)x^2 - 2ax + a + 1 = 0$. (1)
Consideriamo per prima cosa la condizione di realtà delle radici: $\Delta \geq 0$, avremo:
$$\Delta \geq 0 \rightarrow \frac{\Delta}{4} = a^2 - (a-3)(a+1) \geq 0 \rightarrow 2a + 3 \geq 0 \rightarrow a \geq -\frac{3}{2}$$
Studiamo ora il segno dei coefficienti dell'equazione data, avremo:

1° coeff. > 0 : $a - 3 > 0$; $a > 3$

2° coeff. > 0 : $-2a > 0$; $a < 0$

3° coeff. > 0 : $a + 1 > 0$; $a > -1$

I capisaldi della discussione, disposti in ordine crescente, sono quindi – 3/2 ; -1 ; 0 ; 3 e per visualizzare i risultati ottenuti costruiamo la figura seguente. Da essa si rilevano facilmente l'intervallo in cui le radici sono reali (intervallo di realtà delle radici) e le variazioni o le permanenze che presentano i coefficienti; quindi si deduce quanto segue:



Procediamo con la discussione:

- Per $a < -3/2$ i discriminante è negativo, quindi le radici non so non reali;
- Per $a = -3/2$ il discriminante è nullo e l'equazione presenta due variazioni. Le radici cono reali coincidenti ed entrambe positive:

$$0 < x_1 = x_2 = \frac{a}{a-3} = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}-3} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{due soluzioni (coincidenti).}$$

- Per $-3/2 < a < -1$ le radici sono reali e, poiché vi sono due variazioni, sono positive: $0 < x_1 < x_2$ due soluzioni.
- Per $a = -1$, il 3° coefficiente è 0, quindi una delle due radici è nulla ($x_1=0$), l'altra è positiva poiché vi è una variazione tra il primo e il secondo coefficiente; si ha cioè: $0 = x_1 < x_2$ quindi due soluzioni di cui una limite.
- Per $-1 < a < 0$ le radici sono reali, l'equazione presenta una variazione e una permanenza, perciò una delle radici è positiva e l'altra è negativa e precisamente avremo: $x_1 < 0 < x_2$ quindi una soluzione accettabile;
- Per $a = 0$ il secondo coefficiente è nullo e le due radici sono perciò opposte, quindi $x_1 = - x_2$, quindi avremo una soluzione.
- Per $0 < a < 3$ le radici sono reali e l'equazione presenta una permanenza e una variazione; precisamente si avrà: $x_2 < 0 < x_1$;

- Per $a = 3$ il primo coefficiente è zero, l'equazione diventa di primo grado e ammette una sola soluzione positiva essendoci una variazione. Avremo $x_1 > 0$.
- Per $a > 3$ le radici sono reali e, poiché ci sono due variazioni, esse sono entrambe positive, quindi: $0 < x_1 < x_2$.

Riassumendo quindi si avrà:

Una soluzione per $-1 < a \leq 3$;

Due soluzioni per $-\frac{3}{2} \leq a \leq 1 \vee a > 3$ (si noti che per a = -3/2 le due soluzioni sono coincidenti).

Osservazioni: Al fine di verificare la correttezza dei calcoli eseguiti e degli schemi costruiti, è bene tenere presenti che:

1. *Per i valori del parametro che annullano il discriminante si devono avere due permanenze o due variazioni*, perché, dovendo le radici essere uguali, esse devono necessariamente avere lo stesso segno;
2. *I valori che annullano il 1° e il 3° coefficiente devono cadere in un intervallo di realtà*, perché, dovendo le radici essere uguali, esse devono necessariamente avere lo stesso segno;
3. *I valori che annullano il 2° coefficiente possono cadere fuori dall'intervallo di realtà*;

Metodi grafici di discussione di un'equazione di secondo grado:

Metodo della famiglia di parabole.

Consideriamo l'equazione parametrica $ax^2 + bx + c = 0$ (1) come risolvente il sistema:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$$

questo sistema, interpretato geometricamente, risolve il problema di determinare le intersezioni A_1 e A_2 dell'asse x con le parabole (variabili) di equazione

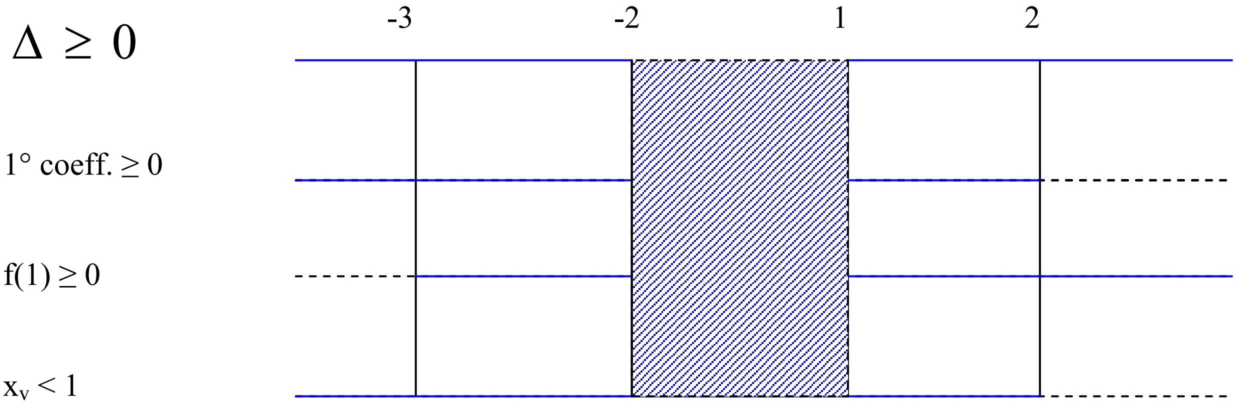
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (2)$$

L'equazione (2) può rappresentare un fascio di parabole o, più generalmente, una famiglia di parabole. Esamineremo, ora, il caso più semplice di discussione in cui l'incognita x debba confrontarsi con il numero α: si voglia cioè decidere per quali valori del parametro è $x > \alpha$ oppure $x < \alpha$. Si tratterà quindi di determinare i valori del parametro per i quali le sopraddette intersezioni A_1 e A_2 sono, una o entrambe, alla destra o alla sinistra del punto $A(\alpha ; 0)$. Si devono dapprima determinare i valori del parametro per i quali la parabola (2) incontra l'asse delle x; si risolve, cioè, rispetto al parametro, la disequazione $\Delta \geq 0$ e si considerano solo quegli intervalli per i quali la disequazione è verificata. Si esamina poi se a concavità della parabola è rivolta verso il semiasse positivo o negativo delle y; si risolve, cioè, la disequazione $\mathbf{a > 0}$. Si deve poi studiare il segno dell'ordinata del punto della curva di ascissa $x = \alpha$, si risolve, cioè, la disequazione $f(\alpha) > 0$. Sarà necessario, qualche volta, confrontare con α l'ascissa del vertice della parabola (ricordando che è $x_v = - b / 2a$), si risolverà quindi $x_v > \alpha$ oppure $x_v < \alpha$. Esaminando, infine, i risultati delle disequazioni prima viste, potranno presentarsi diversi casi, che illustriamo con i seguenti esempi.

1) Risolvere l'equazione $(2-a)x^2 + 2ax + 1 = 0$ (1) con la condizione $x > 1$.

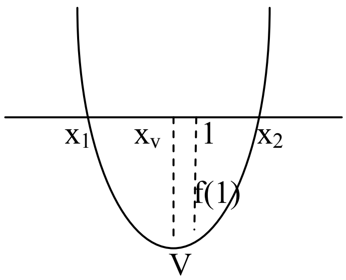
Risolvere l'equazione (1) vuol dire determinare le intersezioni delle parabole del fascio di equazione $y = f(x) = (2 - a)x^2 + 2ax + 1$ (2) con l'asse delle x, di equazione y = 0; si tratterà poi di confrontare la posizione delle eventuali intersezioni con il punto dell'asse x di ascissa 1 e accettare come soluzioni solo quelle di ascissa > 1.

La parabola (2) incontra l'asse x se è $\Delta \geq 0$, cioè se è $4a^2 - 4(2 - a) \geq 0$ e quindi $a \leq -2 \vee a \geq 1$. Esaminiamola concavità della parabola, studiando il segno del primo coefficiente: sarà $2 - a \geq 0$ quindi $a \leq 2$. Studiamo ora il segno dell'ordinata del punto della parabola di ascissa 1 e consideriamo pertanto il segno di f(1): avremo $f(1) = 2 - a + 2a + 1 \geq 0$ per $a \geq -3$. Calcoliamo l'ascissa del vertice x_v e la confrontiamo con il numero 1; essendo $x_v = \dfrac{a}{a-2}$, si ha $x_v < 1$ per $\dfrac{a}{a-2} < 1 \rightarrow a < 2$. Riassumiamo i risultati trovati nella figura seguente:



Esaminiamo ora ciò che accade nei diversi intervalli di variabilità del parametro a :

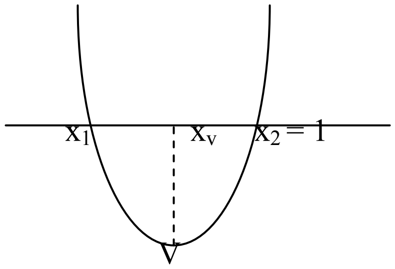
Sia a < -3:



1) Avremo $x_1 \neq x_2$ poiché il Δ è positivo;
2) Disegniamo la parabola con la concavità rivolta verso l'alto (è infatti a > 0);
3) E' f(1) < 0 (poiché è f(1) > 0 da -3 in poi) quindi l'ordinata di 1 deve cadere nel quadrante negativo –> l'ascissa di 1 si trova all'interno dell'intervallo delle radici;
4) L'ascissa del vertice è < 1 quindi sarà $x_v < 1 < x_2$;
5) Confrontando i risultati ottenuti nel grafico possiamo notare che è:
   $x_1 < 1 < x_2$ quindi (ricordando che la nostra limitazione è x > 1) accettiamo UNA sola soluzione ($x_2 > 1$);

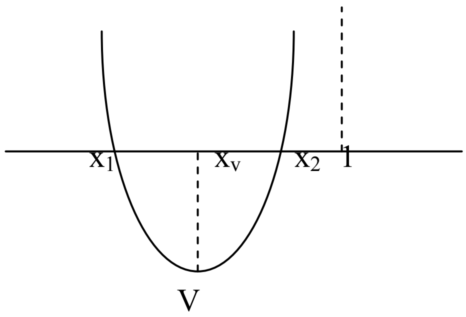
Procederemo, seguendo il precedente metodo di confronto, in tutti gli altri casi:

Sia a = -3:



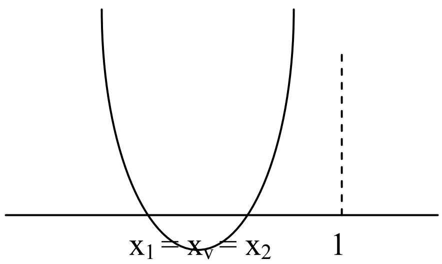
1) Avremo $x_1 \neq x_2$ poiché il Δ è positivo;
2) Disegniamo la parabola con la concavità rivolta verso l'alto (è infatti a > 0);
3) E' f(1) = 0, il numero 1 in questo caso coincide con una delle due intersezioni;
4) L'ascissa del vertice è < 1 quindi sarà $x_2 = 1$;
5) Confrontando i risultati ottenuti nel grafico possiamo notare che è:
   $x_1 < 1 = x_2$ quindi (ricordando che la nostra limitazione è x > 1) accettiamo NESSUNA soluzione.

Sia -3 < a < -2:



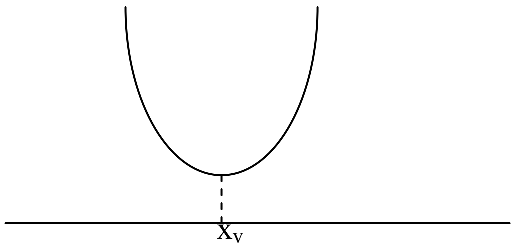
1) Avremo $x_1 \neq x_2$ poiché il Δ è positivo;
2) Disegniamo la parabola con la concavità rivolta verso l'alto (è infatti a > 0);
3) E' f(1) > 0 quindi l'ordinata di 1 deve cadere nel quadrante positivo –> l'ascissa di 1 si trova all'esterno dell'intervallo delle radici;
4) L'ascissa del vertice è < 1 quindi sarà $x_1 < x_v < x_2$;
5) Confrontando i risultati ottenuti nel grafico possiamo notare che è:
   $x_1 < x_2 < 1$ quindi (ricordando che la nostra limitazione è x > 1) accettiamo NESSUNA soluzione.

Sia a = -2:



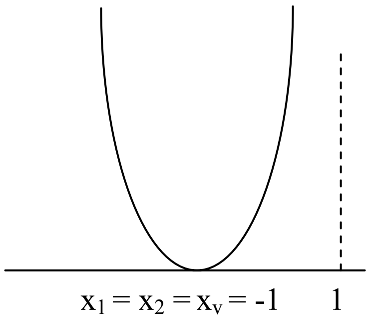
1) Avremo $x_1 = x_2$ poiché il Δ è nullo;
2) Disegniamo la parabola con la concavità rivolta verso l'alto (è infatti a > 0);
3) E' f(1) > 0 quindi l'ordinata di 1 deve cadere nel quadrante positivo –> l'ascissa di 1 si trova all'esterno dell'intervallo delle radici;
4) L'ascissa del vertice è < 1 quindi sarà $x_1 = x_2 = x_v$;
5) Confrontando i risultati ottenuti nel grafico possiamo notare che è:
   $x_1 = x_2 = x_v = \frac{1}{2} < 1$ quindi (ricordando che la nostra limitazione è
   x > 1) accettiamo NESSUNA soluzione.

Sia -2 < a < 1:



1) Notiamo che sarà $\Delta < 0$;
2) La parabola con la concavità rivolta verso l'alto non incontra l'asse delle x in nessun punto;
3) Non esistono soluzioni reali.

Sia $a = 1$:

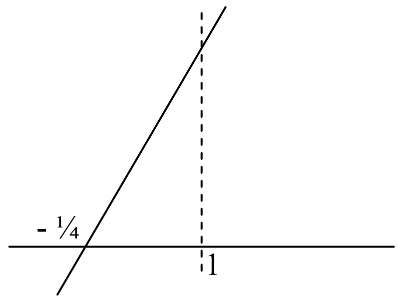


1) Avremo $x_1 = x_2$ poiché il Δ è nullo;
2) Disegniamo la parabola con la concavità rivolta verso l'alto (è infatti $a > 0$);
3) E' $f(1) > 0$ quindi l'ordinata di 1 deve cadere nel quadrante positivo –> l'ascissa di 1 si trova all'esterno dell'intervallo delle radici;
4) L'ascissa del vertice è < 1 quindi sarà $x_1 = x_2 = x_v$;
5) Confrontando i risultati ottenuti nel grafico possiamo notare che è:
   $x_1 = x_2 = x_v = -1 < 1$ quindi (ricordando che la nostra limitazione è
   $x > 1$) accettiamo NESSUNA soluzione.

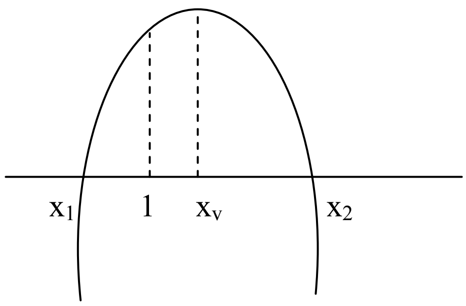
Sia $1 < a < 2$: si ripetono le considerazioni già fatte per il secondo intervallo ($-3 < a < -2$):
$x_1 < x_2 < 1$ nessuna soluzione.

Sia $a = 2$: la parabola degenera nella retta di equazione $y = 4x + 1$ che taglia l'asse x nel punto $x = -\frac{1}{4}$. Si ha così

$$x = -\tfrac{1}{4} < 1 \text{ Nessuna soluzione.}$$



Sia $a > 2$:



1) Avremo $x_1 \neq x_2$ poiché il Δ è positivo;
2) Disegniamo la parabola con la concavità rivolta verso il basso (è infatti $a < 0$);
3) E' $f(1) > 0$, quindi l'ordinata di 1 deve cadere nel quadrante positivo –> l'ascissa di 1 si trova all'interno dell'intervallo delle radici;
4) L'ascissa del vertice è > 1;
5) Confrontando i risultati ottenuti nel grafico possiamo notare che è:
   $x_1 < 1 < x_2$ quindi (ricordando che la nostra limitazione è $x > 1$) accettiamo una sola soluzione (x_2)

<u>Conclusioni:</u> Dopo aver analizzato i vari risultati ottenuti, possiamo concludere che l'equazione data ammette UNA soluzione soddisfacente la condizione $x > 1$ per :
$a < -3 \vee a > 2$.

Un altro caso frequente di discussione è quello in cui l'incognita x è sottoposta a DUE condizioni che possono essere

- $\alpha < x < \beta$
- $x < \alpha \lor x > \beta$

In questi casi si dovranno applicare le regole già elencate precedentemente per $f(\alpha)$, anche a $f(\beta)$.

Metodo della parabola fissa.

Quando i coefficienti dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ sono funzioni lineari di un parametro, può essere agevole considerare la stessa equazione come un'equazione risolvente il sistema formato da un'equazione di secondo grado priva del parametro (parabola fissa) e da un'equazione di primo grado contenente il parametro (fascio di rette). Discutere l'equazione significa, in tal caso, ricercare i valori del parametro per i quali le rette del fascio intersecano la parabola in uno o due punti le cui ascisse soddisfino alle limitazioni imposte all'incognita. In generale per ottenere il sistema che ammette l'equazione parametrica come risolvente si può porre, nella stessa equazione:

$$x^2 = y$$

Con questa posizione il sistema cercato è:

$\begin{cases} y = x^2 \\ ay + bx + c = 0 \end{cases}$ equazioni della parabola fissa e del fascio di rette.

A questo sistema vanno ovviamente aggiunte le limitazioni per l'incognita dell'equazione.

Osserviamo il seguente esempio:

Discutere il sistema misto $\begin{cases} x^2 - 2x + k - 2 = 0 \\ -1 \le x \le 2. \end{cases}$. Con la sostituzione prima citata, per ottenere la parabola fissa e il fascio di rette, avremo il sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 2x + k - 2 = 0 \\ -1 \le x \le 2. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - k + 2 \\ -1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Dopo aver disegnato la parabola di equazione $y = x^2$, determiniamo le coordinate dei suoi punti di ascissa -1 e 2; si otterranno i punti A(-1 ; 1) e B(2 ; 4) e dovremmo considerare l'arco AB di parabola (vedi figura), estremi inclusi. Le rette del fascio $y = 2x - k + 2$ sono tutte parallele alla retta per O di equazione $y = 2x$ corrispondente a $k = 2$; determiniamo per quali valori di k esse passano per A e B e per quale si ha la retta tangente.
Applicazione di A e B al fascio di rette:

Retta per A: $1 + 2 + k - 2 = 0$: $k = -1$: $y = 2x + 3$
Retta per B: $4 - 4 + k - 2 = 0$: $k = 2$: $y = 2x$
Retta tangente : pongo $\Delta = 0$ nell'equazione $x^2 - 2x + k - 2 = 0$ ottengo $k = 3$: $y = 2x - 1$ (la retta è tangente nel punto T(1 ; 1).

Si noti che l'ordinata all'origine della generica retta è $q = 2 - k$ e quindi, decrescendo q con continuità, k aumenterà con continuità.

Dall'analisi della figura si ha che per:

$k < -1$: Nessuna soluzione
$k = -1$: $x_1 = -1$, una soluzione limite

$-1 < k < 2$: Una soluzione: $-1 < x_1 < 0 < 2$

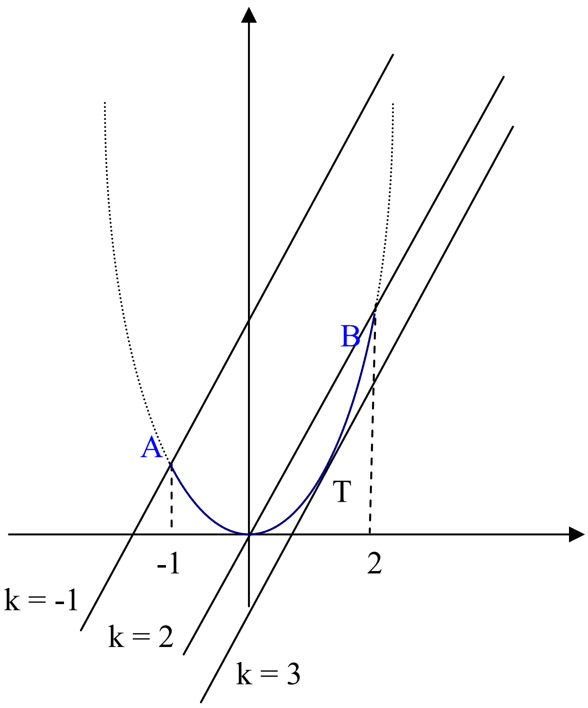
$k = 2$: Due soluzioni di cui una limite

$2 < k < 3$: Due soluzioni $-1 < 0 < x_1 < x_2 < 2$

$k = 3$: Due soluzioni coincidenti $-1 < x_1 = x_2 = 1 < 2$

$k > 3$: Nessuna soluzione.

Concludendo, diremo che l'equazione data ha
Una soluzione per $-1 \leq k < 2$
Due soluzioni per $2 \leq k \leq 3$



Metodo del parametro isolato.

Supponiamo ora che il parametro figuri solo nel termine noto dell'equazione di secondo grado: l'equazione da discutere si presenta allora nella forma
$ax^2 + bx + c(k) = 0$ (1)
La (1) può presentarsi come equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = -c(k) \end{cases}$$

e perciò si tratterà di determinare le intersezioni della parabola fissa di equazione $y = ax^2 + bx$ con e rette parallele all'asse x, del tipo $y = -c(k)$: tali intersezioni dovranno avere ascisse soddisfacenti alla limitazioni assegnate per l'incognita.

Vediamo il seguente esempio:

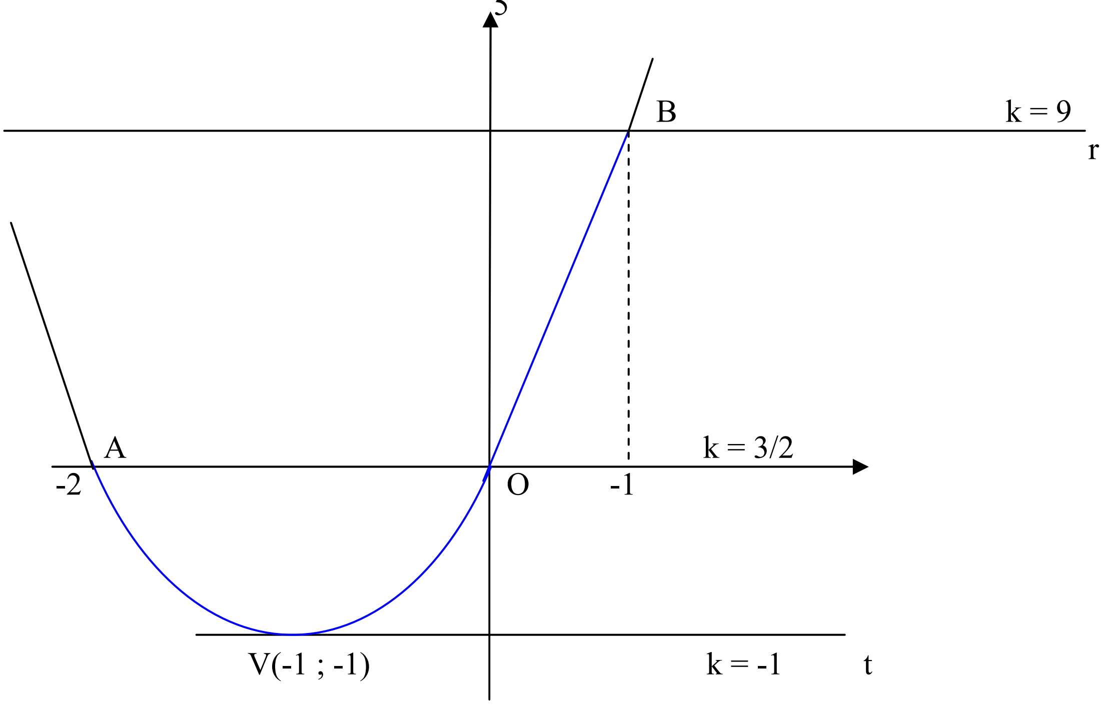
Sia da risolvere il sistema misto: $\begin{cases} 5x^2 + 10x - 2k + 3 = 0 \\ -2 \leq x < 1 \end{cases}$ (2)

Osserviamo che l'equazione data può essere così trasformata:
$5x^2 + 10x - 2k + 3 = 0 : 5x^2 + 10x = 2k - 3 : \ x^2 + 2x = \dfrac{2k-3}{5}$.

Il sistema equivalente al sistema (2) è quindi $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = \dfrac{2k-3}{5} \\ -2 \leq x < 1 \end{cases}$ (3)

La prima equazione rappresenta una parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine O(0 ; 0), per A(-2 ; 0) e di vertice V(-1 ; -1), mentre la seconda equazione è quella di un fascio di rette parallele all'asse x . Risolvere il sistema (2) significa determinare per quali valori di k la parabola e le rette si intersecano in punti la cui ascissa soddisfa la limitazione posta. Si noti che ponendo x = 1 nell'equazione della parabola, si ottiene y = 3: pertanto è B(1; 3) (vedi figura) . Osservando la figura, si nota che le intersezioni che interessano sono sull'arco A di parabola (A compreso, B escluso), essendo A(-2 ; 0) e B(1 ; 3): infatti le ascisse dei punti di tale arco soddisfano la condizione $-2 \leq x < 1$.
Sia r la retta del fascio passante per B, t la tangente nel vertice, mentre la retta del fascio passante per A è l'asse x: determiniamo i valori di k che corrispondo a queste *rette notevoli*:

- la retta r ha equazione $y = 3 \to \frac{2k-3}{5} = 3 \to k = 9$;
- l'asse x ha equazione $y = 0 \to k = \frac{3}{2}$;
- la retta t ha equazione $y = -1 \to \frac{2k-3}{5} = -1 \to k = -1$.



Osservando la figura, si noterà che per:

k < -1: nessuna retta del fascio incontra la parabola: nessuna soluzione

k =-1: la retta del fascio t è tangente alla parabola, avremo 2 soluzioni coincidenti

-1 < k < 3/2: le rette del fascio toccano l'arco AB in 2 punti. 2 soluzioni

k = 3/2: la retta del fascio incontra la parabola in 2 punti: 2 soluzioni di cui una limite.

3/2 < k < 9: le rette del fascio toccano la parabola in un solo punto: 1 soluzione.

k = 9: non vi è alcuna soluzione, infatti la retta del fascio (r) incontra la parabola nel punto B la cui scissa 1 non è accattabile per le limitazioni poste.

k > 9 nessuna soluzione poiché consideriamo solo l'arco di parabola AB

Possiamo concludere che avremo:
1 soluzione per 3/2 < k < 9;
2 soluzioni per -1 ≤ k ≤ 3/2.

Discussione grafica di sistemi parametrici.

Abbiamo già visto come sia possibile risolvere graficamente alcuni sistemi di due equazioni in due incognite rappresentando sullo stesso piano cartesiano le due equazioni e ricercando quindi le eventuali intersezioni delle due curve ottenute.

Ammettiamo ora che il sistema da risolvere sia un sistema parametrico nel quale compaia un'equazione con parametro e un'equazione senza parametro: la prima, che di solito conterrà il parametro al primo grado, sarà rappresentata graficamente da un *fascio di curve* , l'altra da una *curva fissa*. Si tratterà quindi di stabilire per quali valori del parametro le curve del fascio intersecano la curva fissa e, in caso affermativo, quante sono tali intersezioni al variare del parametro.
Supponiamo che il sistema contenga, oltre alle due equazioni, alcune condizioni a cui devono soddisfare le incognite: esse individuano sulla curva fissa degli archi particolari nei quali devono cadere le eventuali intersezioni; la discussione del sistema si articolerà quindi secondo quanto è stato già visto a proposito dei metodi grafici per la discussione di un'equazione di secondo grado.

Si debba discutere il seguente sistema parametrico:
$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x - y = k \end{cases}$ con le condizioni 0 ≤ x ≤ 1 e -1 ≤ x ≤ 1.
Si tratta di determinare per quali valori di k le intersezioni della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ con il fascio di rette parallele di equazione y = 2x – k hanno ascissa e ordinata soddisfacenti alle limitazioni poste: le intersezioni dovranno, cioè, appartenere alla semicirconferenza, estremi inclusi, situata nel primo e nel quarto quadrante. Ricerchiamo le rette notevoli del fascio, cioè quelle passanti per B(0 ; 1) e C(0 ; -1) e la tangente t in T :
retta per B: y = 2x + 1 per k = -1
retta per C: y = 2x – 1 per k = 1.
Per determinare il valore di k corrispondente alla retta t tangente alla circonferenza si può procedere i più modi:
- Annullare il discriminante dell' equazione risolvente il sistema
- Sfruttare la proprietà che la distanza dal centro alla retta t è uguale alla misura del raggio:

$$\frac{|k|}{\sqrt{4+1}} = 1 \rightarrow |k| = \sqrt{5} \rightarrow k = \pm\sqrt{5}$$

la retta t corrisponde al valore $k = \pm\sqrt{5}$ e la sua equazione è y = 2x - $\sqrt{5}$
Dall'esame della figura si può concludere che per:

k < -1: nessuna soluzione;

k = -1: $x_2 = 0$ e $y_2 = 1$ nessuna soluzione

-1 < k < 1: una soluzione. Infatti tutte le rette delle striscia determinata da r e s incontrano in un solo punto l'arco CAB;

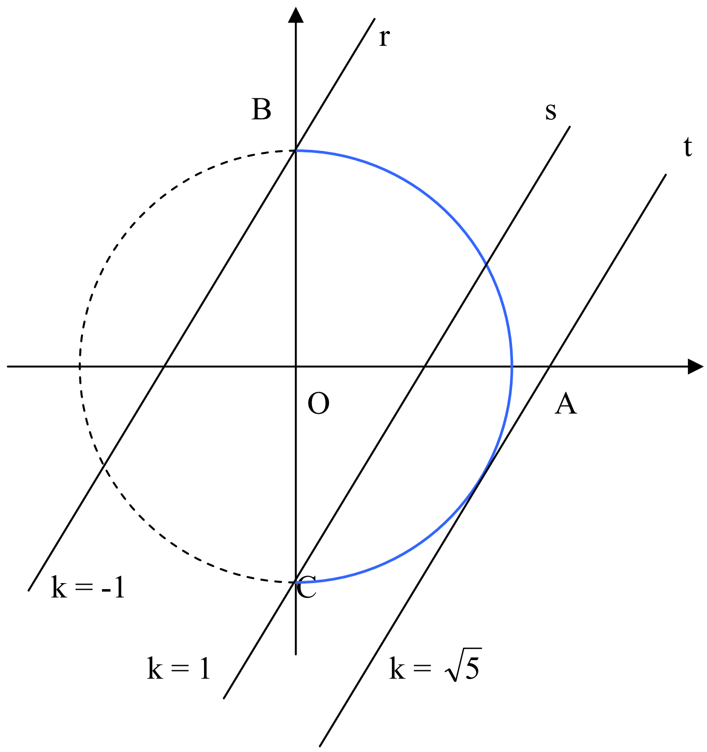
k = 1: due soluzioni di cui una limite. Infatti $x_1 = 0 < x_2 < 1$ e $y_1 = -1 < y_2 < 1$;

$1 < k < \sqrt{5}$: due soluzioni; infatti le rette intersecano la curva in 2 punti;

$k = \sqrt{5}$: due soluzioni coincidenti. Infatti si ha

$$0 < x_1 = x_2 = x_T = \frac{2\sqrt{5}}{5} < 1 \wedge -1 < y_1 = y_2 = y_T = -\frac{\sqrt{5}}{5} < 1;$$

$k > \sqrt{5}$: nessuna soluzione. Infatti non vi sono intersezioni.



Discussione grafica di equazioni irrazionali.

Dovendo discutere un'equazione irrazionale si preferisce, pel lo più, seguire metodi grafici. Esaminiamo alcuni tra i casi più comuni, che rientrano nel caso più generale di equazione irrazionale del tipo

$$\sqrt{f(x)} = g(x : k), \qquad (1)$$

dove g(x ; k) è un polinomio di primo grado in x e k è un parametro variabile, relativamente a certe condizioni che costituiscono i limiti di x . Si tratterà quindi di trasformare l'equazione (1) in un opportuno sistema da discutere graficamente. La (1) può infatti scriversi nella forma equivalente

$$\begin{cases} y = \sqrt{f(x)} & (2) \\ y = g(x;k) & (3) \end{cases}$$

la cui risoluzione si riconduce alla determinazione delle intersezioni della curva fissa (o di un suo arco individuato dalle limitazioni poste) di equazione (2) con rette del fascio rappresentato dalla (3), al variare di k.

1° caso. Consideriamo dapprima il caso in cui l'equazione da discutere sia del tipo

$$\sqrt{ax+b} = cx+d \qquad (4)$$

con c e d dipendenti, uno o entrambi, da un parametro variabile k.

La (4) può considerarsi come equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{ab+b} \\ y = cx+d \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = ax+b & \text{con } y \geq 0 \qquad (5) \\ y = cx+d & \qquad (6) \end{cases}$$

Le soluzioni della (4) sono perciò le eventuali intersezioni tra il ramo della parabola fissa di equazione (5), situato nel semipiano delle ordinate positive o nulle, e le rette variabili di equazione (6).

2° caso. Consideriamo ora il caso in cui l'equazione da discutere sia del tipo

$$\sqrt{a^2+bx+c} = dx+e \qquad (7)$$

con d ed e dipendenti, uno o entrambi da un parametro reale k.
La (7) può considerarsi come equazione risolvente il sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{ax^2+bx+c} \\ y = dx+e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 = ax^2+bx+c & con \quad y \geq 0 \qquad (8) \\ y = dx+e & \qquad (9) \end{cases}$$

Nel piano Oxy, l'equazione $y^2 = ax^2 + bx + c$ rappresenta per $a < 0$, sotto opportune condizioni, un'ellisse (per $a = -1$ una circonferenza) e per $a > 0$ un'iperbole; l'equazione (9) rappresenta un fascio di rette.

Vediamo insieme il seguente esempio:

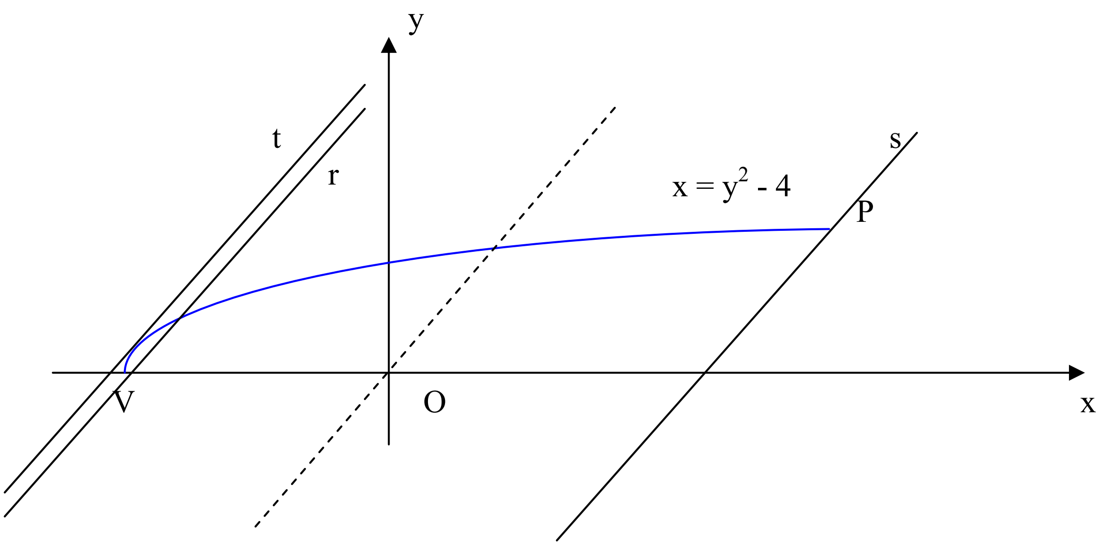
Sia da discutere l'equazione

$$\sqrt{x+4} = 2x+k \qquad con \qquad x < 5.$$

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+4} \\ y = 2x+k \\ x < 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = y^2-4, & con \quad y \geq 0 \\ y = 2x+k \\ x < 5 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta una parabola di cui di devono considerare però solo i punti di ordinata positiva o nulla (vedi figura).



Sia P il suo punto di ascissa 5: P(5 ; 3)

La seconda equazione rappresenta invece un fascio improprio di rette parallele alla retta y = 2x , ottenuta ponendo k = 0; le rette notevoli del fascio sono:

- la t, tangente alla parabola, di equazione $y = 2x + \frac{65}{8}$ $(per\ k = \frac{65}{8})$;
- la r, passante per V, di equazione
  y = 2x + 8 (per k =8);
- la s, passante per P, di equazione:
  y = 2x – 7 (per k = -7).

Dall'esame della figura si deduce che:

per -7 < k < 8 si ha una soluzione e per -8 ≤ k ≤ 65 /8 si hanno due soluzioni.