Matematica Finanziaria.

Contents

1 Introduzione. 2

2 Il Mercato dei Titoli Obbligazionari e le Strutture per Scadenza. 3
- 2.1 Generalità e Tipologie. 3
- 2.2 Contratti e Prezzi Forward. 7
- 2.3 Strutture di Tipo Istantaneo. 11
- 2.4 Relazioni fra Mercato e Leggi Finanziarie. 14

3 I Titoli del Mercato Italiano delle Obbligazioni. 17

4 Un Semplice Modello di Equilibrio del Mercato. 19

5 Metodologie di Stima della Struttura per Scadenza. 29
- 5.1 Metodo del Bootstrapping. 30
- 5.2 Un Metodo Polinomiale che Minimizza gli Errori. 34

6 STRIPS e Strumenti Finanziari a Rendimento Variabile. 39
- 6.1 STRIPS. 40
- 6.2 Titoli a Cedola Variabile. 41

7 I Contratti SWAP. 46
- 7.1 Il Fondamento Economico del Contratto SWAP. 49
- 7.2 Pricing e Valutazione di Contratti IRS. 51
  - 7.2.1 La Determinazione del Tasso SWAP di Equilibrio. 52
  - 7.2.2 La Valutazione dei Contratti IRS. 59

8 Rischio di Tasso e Immunizzazione Finanziaria. 65
8.1 Un Primo Schema di Immunizzazione Finanziaria. 67
8.2 La Duration. 74
8.2.1 La Duration di Portafogli. 77
8.3 Indicatori di Variabilità del Valore di un Flusso. 79
8.4 Aspetti Applicativi della Immunizzazione Finanziaria. 83

9 Complementi. 90
9.1 Ammortamenti e loro Valutazione. 90
9.1.1 Scelta fra Diverse Modalità di Ammortamento. 91
9.1.2 La Valutazione dei Prestiti. 92
9.2 Il problema della Ricerca del Tasso Interno di Rendimento. . . . 96
9.2.1 Il Teorema del Punto Fisso e il Metodo di Newton per la Approssimazione di Radici di Funzioni. 96
9.2.2 Problematiche Connesse alla Ricerca del TIR. 101

1 Introduzione.

Le operazioni delle quali verrà trattato nel seguito vengono genericamente definite operazioni finanziarie e riguardano lo scambio di importi nel tempo. Nella forma più generale vengono indicate mediante una coppia di vettori:

$$\{x/t\} = \{(x_0, x_1, ..., x_m) / (t_0, t_1, ..., t_m)\} \tag{1}$$

essendo le componenti di x importi e quelle di t tempi. Fissata la data odierna t_0, gli istanti $t_1, ..., t_m$ rappresentano epoche successive ad oggi, mentre gli importi x_j, introiti se positivi ed esborsi se negativi, si considerano disponibili al tempo t_j. La coppia {x/t}, importi/tempi prende il nome di flusso, anche se lo stesso termine verrà impiegato, una volta chiarito quale sia lo scadenziario t, per indicare semplicemente il vettore degli importi x.

Una operazione finanziaria rappresenta dunque un rapporto di scambio di importi fra due soggetti, rapporto di natura deterministica in quanto si assume che le poste siano certe sia per quanto riguarda il loro ammontare che le epoche alle quali si rendono disponibili. Tipico esempio di operazione finanziaria è quella che deriva da un rapporto di deposito o di conto corrente che si instaura fra una banca ed il cliente:vista retrospettivamente, una volta che il rapporto si è concluso, essa si configura come una sequenza di importi scambiati a definite epoche.

Numerosi sono i problemi che si possono associare ad un a operazione finanziaria e la natura di questi dipende dal contesto nel quale la stessa viene definita. Così, ad esempio, se l'operazione si trova inserita fra gli scambi che in un determinato periodo sono effettuati in un certo mercato dove si negoziano obbligazioni, l'importo x_0 rappresenta il prezzo odierno di acquisto del titolo (e pertanto un numero negativo) mentre gli importi $x_1, ..., x_m$, usualmente tutti positivi, sono gli incassi a cui l'acquirente del titolo ha diritto fino alla scadenza t_m. In tale contesto può porsi il problema della determinazione di un indice di redditività con il quale confrontare l'operazione con altre della stessa natura, oppure della determinazione di un indice che traduca la maggiore o minore sensibilità dell'operazione nei confronti di future possibili variazioni delle condizioni del mercato.

Se invece l'operazione finanziaria traduce un rapporto contrattuale fra due soggetti al di fuori di un mercato borsistico, come un contratto di mutuo o un rapporto di conto corrente, la problematica specifica alla quale si dà luogo può essere quella della definizione di un particolare importo (ad esempio il primo, da versare o da incassare oggi, o l'ultimo da collocare in t_m) tenendo conto delle condizioni che le parti hanno stabilito per regolare i reciproci rapporti. Alternativamente, può essere l'epoca alla quale collocare un importo a costituire la variabile che il problema richiede sia specificata.

Per i problemi che sono specificatamente connessi al mercato e ai titoli che in questo sono negoziati, il principio della assenza di opportunità di arbitraggio costituisce il riferimento concettuale dal quale discendono le regole operative che verranno impiegate.Per la seconda classe di operazioni invece, la soluzione passa attraverso un processo di valutazione che richiede sia definita una opportuna funzione valore $W(t)$ deducibile in base alla legge finanziaria concordata dalle parti per disciplinare i loro rapporti.

2 Il Mercato dei Titoli Obbligazionari e le Strutture per Scadenza.

2.1 Generalità e Tipologie.

Con riferimento alla notazione $\{x/t\}$ introdotta per descrivere una generica operazione finanziaria si possono prendere in considerazione alcuni casi particolari idonei a schematizzare le operazioni cui dà luogo la negoziazione dei titoli più frequentemente trattati sui mercati finanziari.

Il caso più semplice è quello nel quale lo scadenziario contiene due sole date: la data odierna ed una futura: $\{x/t\} = \{(x_0, x_m) / (t_0, t_m)\}$. Sul mercato vengono trattati titoli di questo tipo, per i quali all'istante iniziale viene pagato un importo (il prezzo del titolo) acquisendo con ciò il diritto a ricevere un importo all'epoca futura t_m quale rimborso. Come sarà più evidente più oltre dopo aver introdotto il concetto di arbitraggio, i due importi x_0 e x_m devono avere segno opposto altrimenti l'operazione consisterebbe in due incassi che non comportano alcun esborso (potendo effettuare numerose operazioni di questo tipo si darebbe luogo ad una money pump, capace di aspirare denaro senza limiti) ovvero in due esborsi privi di contropartita attiva. Si pone $x_0 = -P(t_0, t_m)$ e $x_m = K$ definendo così $P(t_0, t_m)$ come prezzo del titolo e K come valore di rimborso, o valore nominale dello stesso. Se il titolo in questione è trattato sul mercato e al tempo t_0 il suo prezzo è $P(t_0, t_m)$, esso ne costituisce la quotazione di quel giorno. Un titolo semplice come quello si qui descritto, caratterizzato da un flusso a due soli elementi, è detto titolo a capitalizzazione integrale o zero coupon bond (zcb).

Definizione 1 Uno zero coupon bond è un titolo per il quale, a fronte del pagamento in t_0 del prezzo $P(t_0, t_m)$, si acquisisce il diritto a ricevere l'importo K al tempo t_m.

Il tempo t_m è detto scadenza (maturity) del titolo, mentre l'intervallo temporale $t_m - t_0$ è definito come la vita residua dello stesso. Titoli di questo genere vengono emessi generalmente da istituzioni pubbliche (Stato, Regioni, ecc) o da organismi privati (società per azioni, banche) ed i primi godono dell'innegabile vantaggio, rispetto ai secondi, di avere il rimborso praticamente certo poichè il fallimento dello Stato o di sue emanazioni è da considerarsi evento anomalo e raro in una economia moderna. In quanto segue si farà sempre riferimento a titoli per i quali l'emittente (cioè il debitore) è un organo statale, escludendo in tal modo dalla trattazione ogni rischio connesso al rimborso.

Al momento della emissione del titolo l'emittente riceve il prezzo e si impegna a corrispondere a scadenza il valore nominale, e dunque secondo il suo particolare punto di vista l'operazione ha le stesse caratteristiche di quella consistente nell'accendere un debito da restituire alla scadenza. Per chi acquista il titolo la situazione può essere diversa se il titolo in questione ha, come si dice, un mercato secondario. Un titolo ha un mercato secondario se, dopo la sua emissione, può essere negoziato presso qualche borsa o altro organismo di intermediazione. La fondamentale conseguenza di tale negoziabilità è che l'acquirente non deve attendere la scadenza t_m per chiudere l'operazione, potendo rivendere il titolo sul mercato ad un prezzo che sarà fissato dalle consuete leggi della domanda e dell'offerta. Poichè il contesto nel quale l'analisi verrà svolta è quello del mercato secondario, ecco che t_0, epoca alla quale si riferisce il prezzo $P(t_0, t_m)$ non sarà in generale la datra di emissione del titolo, ma quella di una sua negoziazione sul mercato.

E' nella prassi degli operatori del mercato associare a ciascuna operazione concernente uno zcb un indice di rendimento chiamato tasso di rendimento effettivo a scadenza, indice riferito all'ipotesi che il titolo venga detenuto fino alla scadenza e calcolato secondo due possibili approcci: il primo lo definisce come il fattore di proporzionalità diretta che lega la differenza fra valore di rimborso e prezzo di acquisto, $K - P(t_0, t_m)$, vita residua $t_m - t_0$ e prezzo di acquisto in base alla:

$$K - P(t_0, t_m) = \alpha P(t_0, t_m)(t_m - t_0)$$

da cui, indicando il fattore α con $\underline{i}(t_0, t_m)$

$$\underline{i}(t_0, t_m) = \frac{K - P(t_0, t_m)}{P(t_0, t_m)(t_m - t_0)} = \left(\frac{K}{P(t_0, t_m)} - 1\right)\frac{1}{(t_m - t_0)} \tag{2}$$

Il secondo approccio, che sarà quello usato nel seguito, utilizza, fra le stesse grandezze una relazione di tipo esponenziale data dalla:

$$i(t_0, t_m) = \left(\frac{K}{P(t_0, t_m)}\right)^{\frac{1}{t_m - t_0}} - 1. \tag{3}$$

In ambedue le impostazioni, l'unità di misura temporale di riferimento è l'anno e quindi l'intervallo $t_m - t_0$ è una frazione o un multiplo dell'anno.

Si noti come il tasso di rendimento effettivo dipenda sia dall'epoca di acquisto che da quella di rimborso. Il significato del rendimento $i(t_0, t_m)$ è quello di compenso, riferito alla base temporale annua, che si riceve per unità monetaria investita, se l'orizzonte temporale dell'operazione va da t_0 a t_m.

Se al tempo t_0 le scadenze per le quali esistono in circolazione titoli di questo tipo sono $t_1, t_2, ..., t_m$, i corrispondenti prezzi $P(t_0, t_1)$, $P(t_0, t_2)$, ..., $P(t_0, t_m)$ sono ricavabili da un listino nel quale sono riportati i valori ai quali le negoziazioni del giorno si sono concluse.

Se si pone inoltre che il valore di rimborso sia unitario (zcb unitari), la sequenza di prezzi giornalieri $P(t_0, t_1)$, $P(t_0, t_2)$, ..., $P(t_0, t_m)$, strumento di fondamentale importanza per tutto quanto concerne lo studio dei mercati finanziari, viene definita come la struttura per scadenza dei prezzi.

Definizione 2 (Struttura per Scadenza dei Prezzi) Dato un mercato nel quale sono negoziati zcb unitari, se all'istante t_0 i prezzi rilevati per le scadenze $t_1, t_2, ..., t_m$ sono rispettivamente $P(t_0, t_1)$, $P(t_0, t_2)$, ..., $P(t_0, t_m)$, questa sequenza costituisce la struttura per scadenza dei prezzi a quell'istante.

I prezzi $P(t_0, t_j)$ sono dunque valori maggiori di zero. Inoltre, se si assume operante il postulato di impazienza (o postulato del rendimento del denaro) in base al quale si preferisce disporre di un importo immediatamente piuttosto che in un'epoca futura, essi sono anche minori di uno. Inoltre deve essere, per ovvie ragioni, $P(t_0, t_0) = 1$. Lo stesso postulato impone infine che sia $P(t_0, t_j) < P(t_0, t_k)$ se è $t_j < t_k$. In base a queste relazioni la struttura per scadenza si riduce ad una sequenza di numeri minori di uno e decrescente con l'allontanarsi della scadenza. E' immediato, a partire dalla struttura per scadenza dei prezzi e dalla (3), costruire la struttura per scadenza dei rendimenti (effettivi): $i(t_0, t_1)$, $i(t_0, t_2)$, ..., $i(t_0, t_m)$.

Se la struttura per scadenza dei prezzi è lo strumento base nelle applicazioni, la struttura dei rendimenti fornisce all'operatore una immediata informazione sintetica sul tipo di relazione vigente in quel momento fra rendimento e durata dell'operazione. Una tipica relazione è quella di tipo crescente: $i(t_0, t_j) < i(t_0, t_k)$ se $t_j < t_k$. Essa sancisce il fatto che, a parità di altre condizioni, investimenti a più lunga scadenza vengono compernsati (sempre su base annua) con più elevati rendimenti. Ma può anche verificarsi che valga la relazione contraria, con più alte remunerazioni sul breve periodo, come pure sono empiricamente rilevabili contesti nei quali la relazione, di un certo tipo per un tratto, cambi andamento nel successivo. Alternativi contesti teorici possono dare ragione delle diverse possibilità e questi vengono analizzati all'interno della teoria economica dei mercati finanziari, che esula dagli argomenti trattati nel presente corso.

Un'altra tipologia di flusso caratteristica che nasce da operazioni sul mercato è quella nella quale il primo elemento è un importo negativo (prezzo da pagare) e tutti gli altri positivi e uguali fra loro escluso l'ultimo. Flussi di questo tipo caratterizzano i cosidetti bullet bonds (titoli con cedola) il cui flusso è sintetizzabikle nel modo seguente:

$$\{x/t\} = \{(-P, C, C, ..., C + K) / (t, t_1, t_2, ...t_m)\}$$

dove con $P > 0$ si è indicato il prezzo del titolo. L'importo C costituisce la cedola che viene corrisposta ad intervalli costanti (quindi è $t_2 - t_1 = ... = t_m - t_{m-1}$), mentre K è il valore nominale o valore di rimborso. Con questo tipo di titolo l'investitore, a fronte del prezzo pagato, riceve un compenso periodico costante più un rimborso finale che in genere è di entità più elevata dei precedenti.

Dal punto di vista delle applicazioni, titoli di questo tipo presentano una difficoltà intrinseca dovuta ai pagamenti periodici delle cedole. In qualche modo viene meno quella semplicità dell'operazione costruita sulla base di un importo erogato all'istante iniziale e restituito a scadenza. Il concetto di tasso di rendimento effetivo, ad esempio, risulta di non facile definizione e comunque la sua formulazione presuppone che si introducano delle ipotesi che per gli zcb non sono necessarie. Poichè per i bullet bonds non avrebbe senso parlare di struttura per scadenza dei prezzi (la presenza delle cedole, in genere diverse da una emissione all'altra, rende poco significativo il concetto), dovranno introdursi, come si vedrà, particolari tecniche computazionali per rendere questi titoli affini agli zcb.

La pratica operativa, spinta dall'esigenza di associare un qualche indice di rendimento anche a questa tipologia di titoli, ha diffuso l'utilizzo del cosidetto rendimento cedolare, o tasso tecnico, definito dal rapporto:

$$R_{ced} = \frac{I}{K} \tag{4}$$

dove I è la somma degli importi erogati annualmente come cedole. Poichè usualmente le cedole hanno cadenza semestrale è di conseguenza $I = \frac{2C}{K}$. Un altro indicatore, definito come rendimento immediato, è il rapporto fra cedole annue e prezzo di acquisto:

$$R_{imm} = \frac{I}{P}. \tag{5}$$

La significatività e la rilevanza operativa di questi ultimi due indici è assai limitata e di essi non si farà più uso nel seguito.

Una variante delle operazioni finanziarie che danno luogo a titoli obbligazionari del tipo bullet bond è quella nella quale gli importi relativi alle cedole risultano dipendenti dalle condizioni vigenti sul mercato il periodo precedente la loro erogazione. Si tratta dei titoli a cedola variabile e per questi la cedola che verrà pagata in t_j risulta nota solo in t_{j-1}. L' operazione viene così a perdere il carattere deteministico che caratterizza le altre emissioni e tuttavia, benchè gli aspetti aleatori non facciano parte dei temi trattati nel corso, i titoli a cedola variabile sono trattabili, entro certi limiti, con gli stessi strumenti con i quali si opera su quelli a cedola costante. Al momento è sufficiente prendere atto della loro esistenza rinviando ai paragrafi successivi la loro anlisi.

Una ulteriore grandezza deducibile dal prezzo di uno zcb, di grande utilità nella costruzione di modelli in tempo continuo, è il rendimento a scadenza, o yield to maturity $h(t_0, t_m)$ definito in base alla relazione:

$$P(t_0, t_m) = e^{-h(t_0, t_m)(t_m - t_0)} \qquad (6)$$

e quindi:

$$h(t_0, t_m) = -\frac{\ln[P(t_0, t_m)]}{t_m - t_0} \qquad (7)$$

ovvero, ricordando che è $P(t_0, t_0) = 1$, anche:

$$h(t_0, t_m) = -\frac{\ln[P(t_0, t_m)]}{t_m - t_0} = -\frac{\ln[P(t_0, t_m)] - \ln[P(t_0, t_0)]}{t_m - t_0} \qquad (8)$$

Anche per i rendimenti a scadenza è immediato definire una struttura per scadenza, direttamente ricavabile da quella dei prezzi in base alla (7).

2.2 Contratti e Prezzi Forward.

Lo schema di mercato sin qui delineato prevede una unica tipologia di titoli: quella per i quali l'istante della stipula del contratto coincide con quello della esecuzione: la nascita dell'impegno, pagamento del prezzo e consegna del titolo avvengono nello stesso istante. Mecati di questo tipo vengono definiti mercati spot e prezzi spot sono i corrispettivi pagati per i titoli. La tendenza degli operatori economici a limitare gli effetti del rischio ha dato origine, inizialmente nei mercati delle materie prime e successivamente anche nei mercati finanziari, a contratti nei quali il momento della stipula, ovvero dell'accordo, non coincide con quello del pagamento del prezzo e della consegna del titolo. In luogo della coppia di istanti (t_0, t_m) che denotano l'istante di stipula-esecuzione e di scadenza, in questo nuovo tipo di contratti si ha la terna (t_0, T, t_m) con t ancora momento della stipula, T momento dell'esecuzione e $t_m > T$ scadenza del contratto. Contratti di questo tipo sono denominati contratti forward e prezzo forward è l'importo da pagare al tempo T, ma fissato all'istante della nascita del contratto, in t_0.

Si indica il prezzo forward da pagare in T per ricevere l'importo unitario in t_m con $P(t_0, T, t_m)$.

In modo del tutto analogo a quanto fatto per i prezzi spot, a partire dai prezzi forward si ricava il tasso di rendimento forward :

$$i(t_0, T, t_m) = \left(\frac{1}{P(t_0, T, t_m)}\right)^{\frac{1}{t_m - T}} - 1 \qquad (9)$$

In presenza simultanea di mercati a pronti ed a termine, la condizione di assenza di arbitraggi impone una nota relazione fra prezzi spot e prezzi forward. Se t, T ed s sono tre epoche (t è la data odierna) allora deve valere la:

$$P(t, s) = P(t, T)\, P(t, T, s)\,. \qquad (10)$$

La dimostrazione di questa relazione utilizza la condizione di non arbitraggio che verrà illustrata più avanti. Già da ora si può però osservare che se in un mercato esistono sia contratti spot che forward (questi ultimi devono coprire le stesse scadenze dei contratti spot), allora i contratti forward sono in qualche misura superflui potendosi ottenere gli stessi flussi utilizzando solamente i contratti spot. Infatti si consideri lo scadenziario $\bar{t} = (t, T, s)$ ed il contratto forvard stipulato in t, con esecuzione in T e scadenza s. Il flusso da esso generato è $\bar{x} = (0, -P(t, T, s), 1)$. Si consideri poi il portafoglio di zcb unitari: $\bar{\alpha} = \left(-\frac{P(t,s)}{P(t,s)}, 1\right)$ nel quale la prima componente indica la quantità di zcb scadenti in T, mentre la seconda la quantità degli zcb scadenti in s.

La tabella seguente mostra che il flusso generato è proprio quello del contrato forward :

	t	T	s
zcb_T	$-\frac{P(t,s)}{P(t,T)} P(t, T) = -P(t, s)$	$-\frac{P(t,s)}{P(t,T)} = -P(t, T, s)$	0
zcb_s	$P(t, s)$	0	1
Risultato	0	$-P(t, T, s)$	1

TABELLA 1

In base alla (10) e alla (3), avendo posto K = 1, è possibile riscrivere la (9) in funzione dei tassi a pronti nel modo seguente:

$$i(t, T, s) = \left(\frac{[1 + i(t, s)]^{s-t}}{[1 + i(t, T)]^{T-t}}\right)^{\frac{1}{s-T}} - 1.$$

E'interessante osservare che,avvendo definito i tassi forward è possibile definire anche i rendimenti a scadenza forward (a termine). Essi si riferiscono a contratti forward e sono imputabili al periodo di investimento da T ad s. Sempre in base alla (10) e tenendo conto della (8), si ha così:

$$h(t, T, s) = -\frac{\log[P(t, T, s)]}{s - T} = -\frac{\log[P(t, s)] - \log[P(t, T)]}{s - T}. \qquad (11)$$

Riepilogando, a partire da una qualunque delle strutture introdotte, e supponendo che lo scadenziario sia ora rappresentato dal vettore $\bar{t} = (t_0, t_1, .., t_k, ..)$ è possibile ottenere, con semplici calcoli, ognuna delle altre e quindi ognuna delle sequenze:

$$P(t_0, t_1), P(t_0, t_2), .., P(t_0, t_k), ...$$
$$h(t_0, t_1), h(t_0, t_2), ..., h(t_0, t_k), ...$$
$$i(t_0, t_1), i(t_0, t_2), ..., i(t_0, t_k)...$$
$$i(t_0, t, t_1), i(t_0, t_1, t_2), ..., i(t_0, t_{k-1}, t_k)...$$
$$h(t_0, t, t_1), h(t_0, t_1, t_2), ..., h(t_0, t_{k-1}, t_k)...$$

In definitiva, conoscendo la struttura dei prezzi, o una dei rendimenti si ha l'informazione completa relativa al mercato di zcb a cui si fa riferimento.

Ancora dalla relazione (9), considerando scadenze equintervallate di un periodo (anno ad esempio) $\bar{t} = (t, t+1, t+2, ..., T, ..., t+k)$, si ottiene:

$$1 + i\,(t, T, T+1) = \frac{P\,(t, T)}{P\,(t, T+1)}. \tag{12}$$

Si ponga poi: $F\,(t, T) = 1 + i\,(t, T, T+1)$, chiamando questa grandezza fattore forward uniperiodale. Si ha così:

$$F\,(t, t) = \frac{P\,(t, t)}{P\,(t, t+1)} = \frac{1}{P\,(t, t+1)}$$

da cui:

$$P\,(t, t+1) = \frac{1}{F\,(t, T)}.$$

E poi ancora:

$$F\,(t, t+1) = \frac{P\,(t, t+1)}{P\,(t, t+2)} = \frac{1}{F\,(t, t)P\,(t, t+2)}$$

da cui:

$$P\,(t, t+2) = \frac{1}{F\,(t, t)F\,(t, t+1)}$$

ed in definitiva:

$$P\,(t, t+k) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} F\,(t, t+j)}. \tag{13}$$

Questa ultima relazione mostra come il prezzo di uno zcb unitario scadente fra k periodi sia esprimibile in funzione dei fattori forward ed in definitiva in funzione dei tassi forward :

$$P\,(t, t+k) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{k-1} [1 + i(t, t+j, t+j+1]}. \tag{14}$$

ed utilizzando l'espressione di $P\,(t, t+k)$ in funzione di $i(t, t+k)$, come discende dalla (3) si ottiene:

$$[1 + i(t, t+k)]^{k} = \prod_{j=0}^{k-1} [1 + i(t, t+j, t+j+1]$$

ovvero:

$$1 + i(t, t+k) = \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} [1 + i(t, t+j, t+j+1] \right\}^{\frac{1}{k}}. \tag{15}$$

La (15) evidenzia il seguente risultato: il fattore spot, $1 + i(t, t + k)$, è la media geometrica dei fattori forward uniperiodali da t+1 a t+k.

Si supponga ora che la struttura per scadnza dei tassi sia crescente: $i(t, t + 1) < i(t, t + 2) < ... < i(t, t + k)$. Poichè ognuno di questi (o meglio, ciascuno di questi aumentato di uno) è una media dei fattori forward uniperiodali, affinchè la media cresca occorre che i successivi fattori che entrano in media siano ciascuno più grande della media stessa, e quindi $1 + i(t, t + j, t + j + 1) > 1 + i(t, t + j + 1)$, ovvero $i(t, t + j, t + j + 1) > i(t, t + j + 1)$. In altri termini, se la struttura per scadenza dei tasi spot è crescente, allora la struttura per scadenza dei tassi forward le sta sopra. Il contrario vale nel caso di struttura a pronti decrescente.

Le tabelle seguenti presentano tre situazioni caratterizzate da struttura per scadenza deirendimenti costante, crescente e decrescente. L'unità di misura temporale è l'anno ed i tassi spot si riferiscono ad impieghi di durata pari al valore riportato nella colonna delle scadenze. I tassi forward si riferiscono invece a durate uniperiodali, misurate sempre a partire dall'epoca riportata nella colonna delle scadenze. Così, in riferimento alla seconda tabella (struttura dei rendimenti crescente) il valore 0.020957 rappresenta il tasso implicito per il periodo che va da tre a quattro anni dalla data iniziale.

La tabella 2 si riferisce ad una situazione nella quale il rendimento annuo è indipendente dalla durata dell'impiego, risultando così costante. Si parla a questo prosito di struttura dei rendimenti piatta (flat yield curve). I mercati reali in genere non presentano strutture di questo tipo, ma questa ipotesi è stata a lungo accettata nelle analisi legate al rischio di tasso (vedi più oltre a proposito della elesticità del prezzo di un titolo in funzione del rendimento) a causa della trattabilità anlitica che da essa deriva.

Scadenze	Prezzo	Tassi Spot	Tassi Forward
1	0.980392	0.020000	0.020000
2	0.961168	0.020000	0.020000
3	0.942322	0.020000	0.020000
4	0.923845	0.020000	0.020000
5	0.905730	0.020000	0.020000
6	0.887971	0.020000	0.020000
7	0.870560	0.020000	0.020000
8	0.853490	0.020000	0.020000
9	0.836755	0.020000	0.020000
10	0.820348	0.020000	0.020000

TABELLA 2

Struttura per Scadenza Tassi Spot Costante

Scadenze	Prezzo	Tassi Spot	Tassi Forward
1	0.980392	0.020000	0.020000
2	0.960936	0.020123	0.022469
3	0.941211	0.020401	0.020957
4	0.920609	0.020895	0.022377
5	0.898367	0.021666	0.024758
6	0.873599	0.027777	0.028351
7	0.845354	0.024290	0.033411
8	0.812685	0.026265	0.040199
9	0.774734	0.028765	0.048985
10	0.730847	0.031851	0.060049

TABELLA 3

Struttura per Scadenza Tassi Spot Crescente

Scadenze	Prezzo	Tassi Spot	Tassi Forward
1	0.980392	0.020000	0.020000
2	0.961220	0.019972	0.019944
3	0.942571	0.019909	0.019785
4	0.924573	0.019799	0.019466
5	0.907392	0.019626	0.011893
6	0.891233	0.019376	0.018131
7	0.876332	0.019037	0.017003
8	0.862959	0.018594	0.015497
9	0.851417	0.018033	0.013556
10	0.844204	0.017340	0.011129

TABELLA 4

Struttra per Scadenza Tassi Spot Decrescente

2.3 Strutture di Tipo Istantaneo.

L'avere sin qui trattato con uno scadenziario discreto, definendo su di esso la struttura per scadenza, consente di formulare una modellistica che è coerente a con i dati reali dei mercati così come ci appaiono:infatti leggendo un listino ciò che troviamo sono proprio prezzi relativi a titoli che coprono un insieme di scadenze discrete.Se però l'obiettivo è quello di costruire modelli nei quali sia possibile utilizzare i risultati dell'analisi, oppure si intende seguire un qualche fenomeno finanziario nella sua evoluzione istante per istante operarando in tempo continuo, allora lo scadenziario di riferimento deve essere un intervallo continuo e prezzi o rendimenti devono essere pensati come funzioni del tempo.Il primo passo in questa direzione è quello introdurre grandezze analoghe a quelle appena definite, riferite però ad intervalli infinitesimi, ottenendo così tassi o rendimenti di tipo istantaneo. In particolare, occorrerà assumere che la struttura per scadenza dei prezzi P (t, s) sia una funzione quanto meno di s e derivabile rispetto a questa variabile. E' bene anche ricordare che fissato s, P (t, s) quale funzione del solo istante iniziale t, rappresenta l'evoluzione nel tempo del prezzo di uno zcb con scadenza s e poichè si tratta di valori riferiti ad istanti futuri, non noti all'istante presente, la strumentazione idonea a rappresentare tale evoluzione è quella dei processi stocastici.

Tornando ora alle grandezze istantanee occorrerà, ove l'operazione non faccia perdere il significato finanziario, fare riferimento ad incrementi temporali Δt, passando poial limite per Δt tendente a zero. E' subito chiaro che non tutte le grandezze introdotte si prestano a tale operazioneIl tasso di rendimento ad esempio, riferito ad un intervallo Δt nel quale si è detenuto uno zcb, è definito dal rapporto: $\frac{P(t,t+\Delta t)-P(t,t)}{P(t,t)}$ che tende a zero con Δt. Il tasso istantaneo non può dunque essere significativamente definito in questo modo.

Si consideri invece il rendimento a scadenza (yield to maturity) h (t, t + Δt). Se lo si esprime in base alla (??) si ottiene, passando al limite:

$$\lim_{\Delta t \to 0} h(t, t + \Delta t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln[P(t, t + \Delta t)] - \ln[P(t, t)]}{\Delta t} = \qquad (16)$$
$$= -\left.\frac{\partial \ln[P(t, s)]}{\partial s}\right|_{s=t} = r_t$$

Il significato che viene dato ad r_t è quello di tasso di rendimento istantaneo. Esso è dunque la remunerazioneper unità investita, derivante da un impiego in t per una durata infinitesima.

Questa quantità, detta (impropriamente) tasso istantaneo, ha in realtà, in quanto derivata logaritmica, ha la natura di intensità istantanea di interesse, più precisamente trattasi della intensità istantanea di interesse in vigore alla data iniziale t per investimenti che iniziano a quella data e di durata infinitesima.

Si deve però osservare che se è noto solo r_t, non è possibile ricostruire l'intera struttura per scadenza che caratterizza il mercato all'istante t. Infatti l'informazione che esso trasmette è limitata all'istante presente e senza un adeguato modello che ne descriva l'evoluzione (ma per ciò è necessario definire una opportuna equazione differenziale stocastica) si perde la struttura dei prezzi vigente in t.

Se l'obiettivo è quello di definire una grandezza istantanea dalla quale sia possibile risalire alla intera struttura per scadenza P (t, s), allora si prendere le mosse dal rendimento a scadenza a termine $h(t_{k-1}, t_k)$.

Si ponga intanto: $t_{k-1} = T$, $t_k = T + \Delta t$. In base alla (11) si ottiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} h(t, T, T + \Delta t) = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln [P (t, T, T + \Delta t)]}{\Delta t} = \tag{17}$$
$$= -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln [P (t, T + \Delta t)] - \ln [P (t, T)]}{\Delta t} =$$
$$= -\frac{\partial \ln [P (t, s)]}{\partial s}\bigg|_{s=T} = f (t, T).$$

La grandezza appena ottenuta, $f (t, T)$, rappresenta una intensità istantanea (in quanto derivata logaritmica) relativa ad un contratto di durata infinitesima, stipulato in t, con esecuzione in T .

E' in sostanza l'intensità alla quale si può investire in T con disinvestimento immediato, in base ad accordi stipulati in t. Per semplicità verrà chiamato tasso istantaneo forward.

E' anche ovvio che deve essere:

$$f (t, t) = r_t . \tag{18}$$

L'introduzione del tasso forward consente di evidenziare i seguenti tre punti:

a) a partire da $f (t, T)$ è possibile risalire alla struttura dei prezzi $v (t, T)$, $T > t$.

b) $f (t, T)$, al variare di T , rappresenta una curva (la curva dei tassi forward). Se si considera poi t quale variabile ciò che si ottiene è un processo stocastico che descrive l'evoluzione nel tempo della struttura per scadenza dei tassi forward.

c) La curva dei rendimenti a scadenza $h (t, T)$ e quella dei tassi forward $f (t, T)$ coincidono all'istante iniziale t, data l'identità: $f (t, t) = h (t, t) = r_t$.

In base al significato delle grandezze introdotte, ed in particolare di $f (t, T)$, è possibile ottenere la seguente relazione in base alla quale i prezi degi zcb (la struttura per scadenza dei prezzi) possono esprimersin funzione dei tassi forward:

$$P (t, T) = e^{-\int_t f(t,u)du} . \tag{19}$$

Si pone, infine, in evidenza una relazione che caratterizza il legame esistente fra la curva dei tassi forward e quella dei rendimenti a scadenza nei casi in cui quest'ultima sia monotona. Muovendo infatti dalla (??) si ha:

$$(T - t)\, h (t, T) = -\ln [P (t, T)] \tag{20}$$

e differenziando rispetto a T ambedue i membri si ottiene:

$$f (t, T) = -\frac{\partial \ln [P (t, T)]}{\partial T} = h (t, T) + (T - t) \frac{\partial h (t, T)}{\partial T} \tag{21}$$

dalla quale risulta che se la curva dei rendimenti a scadenza è crescente ($\frac{\partial h(t,T)}{\partial T} \geq 0$), allora la curva dei tassi forward le sta sopra (i tassi forward dominano i rendimenti a scadenza), mentre sta sotto nel caso di curva dei rendimenti a scadenza decrescenti.

2.4 Relazioni fra Mercato e Leggi Finanziarie.

Quanto sin qui esposto ha preso le mosse dalla osservazione del mercato e dei suoi dati fondamentali che sono riassunti nelle strutture per scadenza. I prezzi dei titoli negoziati, come è a tutti noto, vengono determinati in base alla legge della domanda e della offerta e nessuna particolare regola ne consente il calcolo. In un'altra realtà economica, per conbtro, contratti per molti aspetti simili a quelli che fungono da motore al mercato dei bonds, vengono disciplinati a partire da accordi che specificano le regole con le quali i valori vengono definiti. Si tratta del mercato del credito nel quale istituzioni di intermediazione finanziaria e società (o privati) stipulano contratti con i quali regolare i reciproci scambi di importi monetari avendo preliminarmente individuato la legge finanziaria alla quale riferirsi. Le grandezze tipiche, da questa derivanti, sono quelle della intensità istantanea e del tasso di interesse. A prescindere dal fatto che nella generalità delle situazioni concrete nelle quali si traducono i rapporti di credito, tasso (o intensità) risultano costanti per tutta la durata del rapporto, delineando così un contesto a struttura piatta (flat yield curve), appare del tutto legittimo domandarsi se è possibile collegare, almeno in via teorica, le grandezze tipiche che definiscono la struttura del mercato dei bonds con quelle che discendono dalla applicazione di specifiche leggi finanziarie.

Nel presente paragrafo, previa ricostruzione della più generale legge finanziaria di tipo esponenziale, si metteranno in evidenza le relazioni che collegano i due citati ambiti operativi.

Si supponga che due soggetti abbiano deciso di regolare i loro rapporti di scambio in base ad una determinata legge finanziaria ed in base ad essa l'evoluzione di un importo unitario versato in t, sia descritto dalla funzione montante M (t, s) essendo s un generico istante successivo a t. Supponendo poi che la legge sia tale per cui M (t, s) è una funziione continua e derivabile rispetto ad s, considerando poi un incremento temporale Δs, in prima approssimazione si può porre:

$$\Delta M_t(s) = \delta_t(s)\, M_t(s)\, \Delta s + o(\Delta s) \tag{22}$$

dove la data di stipula del contratto t viene posta come indice e dove $o(\Delta s)$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a Δs. La (22) mostra che l'incremento del montante è proporzionale ad una funzione (fissata in t) che dipende dall'istante s al montante stesso a quel tempo ed all'incremento temporale, più un infinitesimo che rappresenta l'errore che si commette assumendo questa relazione di proporzionalità.

Dividendo ambedue i membri della (22) per Δs e passando al limite per $\Delta s \to 0$, avendo ipotizzato la derivabilità di $M_t(s)$, si ottiene:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta M_t(s)}{\Delta s} = \frac{dM_t(s)}{ds} = \delta_t(s)\, M_t(s) \tag{23}$$

e dividendo i due membri per $M_t(s)$ si giunge infine alla:

$$\frac{M_t^0(s)}{M_t(s)} = \delta_t(s) \tag{24}$$

ovvero

$$\delta_t(s) = \frac{d \ln [M_t(s)]}{ds}. \qquad (25)$$

Questa ultima relazione mostra che, posto che l'incremento del montante sia esprimibile nella forma della (22), l'intensità istantanea di interesse è la derivata logaritmica del montante. Integrando i due membri della (25) si ottiene poi:

$$\int_t^s \delta_t(u)\, du = \int_t^s \frac{d \ln [M_t(u)]}{du}$$

da cui

$$M_t(s) = K\, e^{\int_t^s \delta_t(u) du}$$

e ponendo che sia $M_t(t) = M_t$, infine:

$$M_t(s) = M_t\, e^{\int_t^s \delta_t(u) du}. \qquad (26)$$

Nel caso in cui sia $\delta_t(s) = \delta$ la (26) diventa la

$$M_t(s) = M_t\, e^{\delta(s-t)} \qquad (27)$$

relazione che fornisce l'evoluzione del montante in regime di capitalizzazione composta. Ancora dalla (26), essendo $M_t = M_t(s)\, e^{-\int_t^s \delta_t(u) du} = M_t(s)\, v(t, s)$, si ottiene

$$v(t, s) = e^{-\int_t^s \delta_t(u) du}. \qquad (28)$$

Cosi è immediato verificare che nella legge della capitalizzazione composta, essendo $\delta_t(s) = \delta$, è conseguentemente $v(0, s) = e^{-\delta s} = v^s$.

Per quanto concerne la legge della capitalizzazione semplice, essendo $M_t(s) = M_t[1 + i(s - t)]$, in base alla (25), ponendo $s - t = \tau$, si ottiene:

$$\delta(\tau) = \frac{i}{1 + i\tau}. \qquad (29)$$

ed essendo $\frac{d\delta(\tau)}{d\tau} = -\frac{i^2}{(1+i\tau)^2} < 0$ segue che in questa legge l'intensità istantanea (ovvero la forza con la quale si producono gli interessi) diminuisce nel tempo e ciò spiega perchè, per impieghi che superano il periodo unitario, il montante prodotto in capitalizzazione semplice sia sempre inferiore a quello prodotto in capitalizzazione composta.

Tornando alla (28) è immediato cogliere l'analogia di questa con la (19), non appena si ponga $P(t, s)$ in luogo di $v(t, s)$. Si può quindi concludere che in un ipotetico mercato nel quale i prezzi degli zcb fossero determinati in base ad una legge di capitalizzazione esponenziale con intensità istantanea $\delta(t, s)$, il tasso forward istantaneo $f(t, s)$ è proprio questa intensità. Immediata è pure l'interpretazione del rendimento a scadenza h (t, s): nelle stesse ipotesi si avrebbe:

$$h(t,s) = \frac{1}{s-t}\int_t^s \delta(t,u)\,du. \tag{30}$$

Per concludere queste note di raccordo fra le grandezze caratteristiche deducibili dal mercato dei bond e quelle che si ricavano in base alle leggi finanziarie, si sintetizzano le relazioni che legano le une alle altre nell'ipotesi che si operi in tempo continuo.

L'elemento chiave nei mercati dei bonds è la struttura per scadenza dei prezzi P (t, s) rilevabile all'istante t, da essa discendono la struttura per scadenza del rendimento a scadenza (yield to maturity) h (t, s) ed il tasso istantaneo forward f (t, s). Dal versante delle leggifinanziarie si individuano il fattore di attualizzazione v (t, s) e l'intensità istantenea δ (t, s) la quale, nella la legge della capitalizzazione composta è una costante δ.

Ponendo che il prezzo degli zcb rappresenti i fattori di attualizzazione si ha:

$$P(t,s) = v(t,s) \tag{31}$$

ed essendo, per la (28), $v(t,s) = e^{-\int_t^s \delta(t,u)du}$ e per la (6) $P(t,s) = e^{-h(t,s)(s-t)}$, è anche:

$$e^{-\int_t^s \delta(t,u)du} = e^{-h(t,s)(s-t)}$$

da cui

$$h(t,s) = \frac{1}{s-t}\int_t^s \delta(t,u)\,du \tag{32}$$

relazione che traduce il teorema della media integraleEssendo poi, per la (19) anche $P(t,s) = e^{-\int_t^s f(t,u)du}$ si ha ancora

$$f(t,s) = \delta(t,s) \tag{33}$$

e quindi

$$h(t,s) = \frac{1}{s-t}\int_t^s f(t,u)\,du. \tag{34}$$

In base alla (32) h (t, s) può essere interpreto come l'intensità costante che sull'arco temporale da t ad s produce il medesimo risultato finanziario ottenibile in base alla intensità variabile δ (t, s).

In questa ottica la relazione $P(t,s) = e^{-h(t,s)(s-t)}$ consente di assimilare un investimento in uno zcb a quello in un deposito remunerato in base alla legge di capitalizzazione composta regolata da una intensità δ = h (t, s). Infatti è $P(t,s)\,e^{h(t,s)(s-t)} = P(t,s)\,e^{\delta(s-t)} = 1$.

3 I Titoli del Mercato Italiano delle Obbligazioni.

Nel mercato italiano esiste, fra i titoli emessi dallo Stato, un unico esempio di zcb: si tratta dei Buoni Ordinari del Tesoro (BOT) emessi dal Tesoro per fronteggiare temporanee esigenze di cassa da parte della Tesoreria dello Stato. La loro emissione avviene ogni quindici giorni ed hanno scadenza tre, sei o dodici mesi. Le modalità di emissione sono quelle di un'asta alla quale possono partecipare in qualità di potenziali acquirenti istituti bancari ed altri organismio di intermediazione finanziaria riconosciuti come dealers.

Fissato il valore di rimborso i valori d'asta sono i prezzi ai quali gli operatori sono disposti ad acquistare. Ogni emissione viene divisa in tranches, ciascuna messa in asta separatamente. La media dei prezzi delle diverse tranches va a costituire il prezzo di emissione (prezzo medio di aggiudicazione) cui fare riferimento per gli aspetti fiscali dell'operazione.

Il valore nominale di ogni emissione, che rappresenta anche il taglio minimo acquistabile di questa tipologia di titoli, è fissato in cinque milioni. Una volta acquistati dagli investitori istituzionali che hanno partecipato al collocamento i BOT vengono trattati sul mercato secondario in base alle quotazioni che sono il risultato dell'interazione fra domanda e offerta.

Il regime fiscale di questi titoli prevede un prelievo alla fonte nella misura del 12.5% sulla diferenza fra il valore di rimborso ed il prezzo medio di aggiudicazione. L'acquirente originario della emissione paga il prezzo risultante dalla procedura d'asta più l'importo che corrisponde all'imposta, affrancando eventuali futuri acquirenti da ogni obbligo fiscale. E' ovvio che il dealer, al momento di vendere i titoli, tiene conto della imposta pagata e quindi il prezzo di vendita che propone è comprensivo di quest'ultima.

Le quotazioni riportate sui listini sono fatte su base 100, come se tale fosse il valore di rimborso.

I bullet bonds emessi dallo Stato e circolanti sul mercato italiano sono i Buoni Poliennali del Tesoro (BTP) emessi dal Tesoro per fronteggiare impegni di spesa a lungo termine (opere pubbliche, interventi di sostegno a determinate categorie, ecc). Le loro scadenze possono essere tre, cinque, sette e dieci anni. Di recente si sono verificate anche delle emissioni trentennali. I titoli in questione portano cedole che sono pagabili semestralmente con un rimborso finale del capitale. Il taglio al quale sono emessi è di cinque milioni ed il meccanismo di emissione è ancora a mezzo asta analogo a quello già visto per i BOT. L'emissione avviene ad un prezzo d'asta inferiore a quello di rimborso K per cui le emissioni sono del tipo sotto la pari (sopra la pari sarebbero se il prezzo di emissione fosse superiore a K, e alla pari in caso di ugualianza). Questa procedura ha delle ripercussioni sul regime fiscale in quanto, a scadenza il portatore del titolo deve pagare l'imposta anche sul cosidetto capital gain rappresentato dalla differenza $K - P$.

A differenza dei BOT, tassati alla fonte una volta per tutte, i BTP prevedono che chi incassa la cedola paghi l'imposta pari al 12.5% e che una uguale aliquota venga applicata al rimborso sul capital gain. Il portatore del titolo paga l'imposta tramite rivalsa, nel senso che questa gli viene trattenuta sulle somme a lui dovute a titolo di cedola o di rimborso finale.

Come già accennato più sopra, ai titoli con cedola non è immediato associare indici di rendimento analoghi al tasso di rendimento effettivo. Si vedrà più oltre che a tale scopo viene definito un nuovo tipo di indicatore.

Le quotazioni che vengono riportate nei listini e che sintetizzano i prezzi di negoziazione dei BTP giorno dopo giorno, non tengono conto della cedola maturata fino a quel momento. Ciò lo si deve all'esigenza di omogeneizzare le quotazioni poichè un titolo assai vicino allla scadenza di una cedola conterrebbe nel prezzo anche questa componente, mentre uno la cui cedola è stata pagata di recente ne sarebbe privo. La quotazione al netto della cedola maturata fino a quel giorno (pertanto di spettanza al venditore del titolo) è detta quotazionbe al secco (corso secco), mentre il prezzo effettivo, ottenuto sommando al corso secco la quota di cedola da corrispondere al venditore, quota chiamata rateo, costituisce il corso tel-quell. Il calcolo del rateo è effettuato moltiplicando la cedola in corso per la frazione ottenuta rapportando all'intero intervallo fra due cedeole la parte che va dalla data di ultimo pagamento a quella cui la quotazione si riferisce. Così se t_j è l'epoca di pagamento della cedola successiva mentre è t_{j-1} quella dell'ultimo pagamento, se τ è il momento della quotazione si ha che il rateo è definito dalla:

$$\text{rateo} = \frac{\tau - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} C \tag{35}$$

Nei listini, accanto al corso secco del titolo è riportato anche il rateo corrispondente.

I titoli a cedola variabile di emissione pubblica negoziati sul mercato italiano sono i Certificati di Credito del Tesoro (CCT). In tutto simili ai BTP si differenziano da questi per l'ammontare della cedola. Questa infatti è variabile ed è scindibile in due componenti: lo spread, percentuale fissata all'emissione, e la parte propriamente variabile calcolata in relazione ai tassi di rendimento dei BOT nel periodo precedente la maturazione della cadola medesima. Titoli di questo tipo (detti ad indicizzazione parziale per la presenza della componente fissa della cedola) sono in grado di adeguarsi alle variazioni delle condizioni del mercato proprio in virtù del loro legame con i rendimenti prevalenti nel periodo. In periodi di elevata inflazione, quando parte dei rendimenti possono essere erosi a causa del deprezzamento della moneta, i CCT hanno rappresentato una valida alternativa alle forme di investimento tradizionale caratterizzate da rendimento fisso.

I CCT forniscono una cedola calcolata in base ai rendimenti medi dei BOT incrementata di un ammontare fisso, detto spread, che varia da emissione in emissione. In ogni istante risulta noto solo l'ammontare della prima cedola in scadenza, mentre le successive vengono a dipendere dalle condizioni del mercato che si presenteranno in futuro. L'investimento in questa tipologia di titoli assume dunque caratteri di aleatorietà che si riperquotono sia sulle modalità di valutazione che sulla determinazione degli indici di redditività.

4 Un Semplice Modello di Equilibrio del Mercato.

Partendo da un semplice esempio è possibile introdurre il nucleo delle tematiche che verranno sviluppate nel presente paragrafo.

Si supponga che in un mercato siano presenti tre zcb articolati su tre diverse scadenze. Sia t_0 l'istante attuale mentre t_1, t_2, t_3 siano le epoche di scadenza dei tre titoli. Infine siano $P(t_0, t_1)$, $P(t_0, t_2)$, $P(t_0, t_3)$ i prezzi, letti su di un listino, degli zcb in questione. Per rendere chiare le idee poniamo che i tempi t_1, t_2, t_3 siano rispettivamente un anno, due e tre anni da oggi e che i prezzi siano $P(t_0, t_1) = 0.9426$, $P(t_0, t_2) = 0.8840$, $P(t_0, t_3) = 0.8238$.

Sullo stesso mercato sia anche negoziabile bullet bond che fornisce tre pagamenti periodici con cadenza annuale: 500 fra un anno, 250 fra due anni e 400 fra tre anni. Sia $V(t, \overline{x}) = 1100$ il prezzo corrente del titolo.

E' immediato verificare che un operatore accorto è in grado di realizzare profitti certi da questa particolare situazione del mercato. Infatti è suficiente vendere allo scoperto una unità del bullet bond acquistando contemporaneamente 500 unità dello zcb con scadenza ad un anno, 250 unità di quello scadente fra due anni e 400 unità di quello scadente fra tre anni. Il costo complessivo di questa strategia è:

$$1100 - (500 \times 0.9426) - (250 \times 0.8840) - (400 \times 0.8238) = 78.18$$

una quantità positiva, che sta ad indicare come nel momento in cui il portafoglio viene costruito, non solo non viene sostenuto alcun esborso, ma si riceve qualcosa.

In seguito, quando giungono a scadenza le poste del bullet bond, è possibile fare fronte agli impegni derivanti dalla vendita allo scoperto esattamente con quanto si incassa dagli zcb acquistati.

In tal modo a fronte di un introito certo all'istante iniziale non si devono poi fronteggiare esborsi nel futuro. Questa strategia costituisce una money pump in grado di aspirare denaro al tempo t, senza nulla richiedere nei tempi successivi. Un mercato nel quale è possibile fare funzionare delle money pumps è un mercato che si trova fuori dall'equilibrio, al quale verrà però rapidamente condotto dalle sue stesse forze, non appena gli operatori si mettono all'opera per sfruttare le opportunità di guadagno che si presentano.

E' facile verificare che l'equilibrio del mercato, con la conseguente eliminazione delle possibilità di ottenere guadagni certi, si realizza se il prezzo V del bullet bond è V = 1021.82. In quanto segue verranno esposti i principi e la tecnica con i quali l'unico prezzo di equilibrio V viene individuato.

Si consideri un mercato nel quale sono negoziabili n titoli articolati sullo scadenziario $\overline{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$ i cui prezzi quotati all'istante t siano rappresentati dal vettore $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$. In quanto segue, per ragioni di semplicità di notazione, il flusso associato a ciascun titolo non comprende il prezzo dello stesso, ma solo gli importi che da esso derivano nelle epoche future. Il mercato può così essere sintetizzato in una matrice X nella quale le colonne rappresentano i flussi dei diversi titoli:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix} \tag{36}$$

Un portafoglio è un vettore $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ le cui componenti rappresentano le quantità del corrispondente titolo che ne fanno parte. Se è $\alpha_j > 0$ il titolo j-mo è detenuto in posizione long (cioè viene acquistato e inserito nel portafoglio), mentre se è $\alpha_j < 0$ il titolo è detenuto in posizione short, cioè viene venduto allo scoperto incassandone il prezzo e trasformando in obblighi di pagamento i futuri incassi a cui dà luogo. Il flusso generato dal portafoglio $\overline{\alpha}$ è dato dal vettore $\overline{y}$:

$$X\overline{\alpha} = \overline{y}. \tag{37}$$

E' noto dall'algebra lineare che se $\overline{y}$ appartiene allo spazio generato dai vettori colonna della matrice X, allora esiste un vettore $\overline{\alpha}$ che verifica la (37). Ciò significa che è possibile costruire, a partire dai titoli del mercato, un portafoglio che dia luogo al flusso $\overline{y}$. Se $\overline{y}$ è un vettore arbitrario, ovvero se un operatore si trova nella situazione di doversi garantire il flusso corrispondente al vettore (si pensi, ad esempio, ad un intermediario finanziario che ha pianificato un insieme di uscite scadenti alle epoche future), la possibilità di allestire un portafoglio $\overline{\alpha}$ capace di garantirlo dipende dalle proprietà dei titoli scambiati sul mercato, ovvero dalla matrice X.

Se $n > m$, ovvero se il numero dei titoli supera quello delle scadenze, ciò significa che alcuni dei vettori colonna della matrice X sono esprimibili come combinazioni lineari di altri. Si supponga che il primo vettore colonna dipenda dai rimanenti. In tal caso ponendo $\overline{x}^1 = (x_{11}, x_{21}, ..., x_{m1})$, esistono $n - 1$ reali $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ tali che

$$\overline{x}^1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{m2} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \dots \\ x_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-1} \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \dots \\ x_{mn} \end{pmatrix}$$

e dunque il portafoglio $\overline{\lambda} = (0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ garantisce il medesimo flusso di quello del primo titolo. Questo può così essere eliminato senza che si alterino le caratteristiche del mercato, ed in modo analogo si può procedere con tutti gli altri titoli che corrispondono a vettori linearmente dipendenti. La matrice X privata dei vettori colona corrispondenti ai titoli eliminati (perchè ridondanti in quanto linearmente dipendenti) contiene solo titoli che non sono altrimenti riproducibili e viene assunta quale espressione del mercato. Essa costituisce il cosidetto paniere fondamentale del mercato ed il numero delle colonne n deve essere non maggiore di quello delle righe m. Nel caso in cui sia $n = m$, se la matrice è di pieno rango (la sua caratteristica è m) allora qualunque flusso può essere realizzato ponendo in essere un opportuno portafoglio, dato che i vettori colonna generano l'intero spazio $\mathbb{R}^n$. Questa proprietà definisce la completezza del mercato.

Definizione 3 Dato un paniere fondamentale X che rappresenta un mercato ad un definito istante t, il mercato è detto completo se X è una matrice quadrata con determinante diverso da zero.

Le condizioni che definiscono l'equilibrio del mercato sono basate sul concetto di assenza di opportunità di arbitraggi, ovvero sulla impossibilità di dare luogo a money pumps del tipo di quella analizzata nell'esempio presentato. Il concetto di arbitraggio, fondamentale nello studio dei mercati finanziari, può essere tradotto formalmente secondo due diversi schemi che si possono definire di tipo A e di tipo B:

Definizione 4 Dato un mercato definito al tempo t dal paniere fondamentale X e dal vettore dei prezzi $\bar{p}$, si definisce arbitraggio di tipo A un portafoglio $\bar{\alpha}$ per il quale si ha:

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{p} \rangle = 0 \qquad X\bar{\alpha} \geq \bar{0} \text{ con almeno una disugualianza stretta} \tag{38}$$

mentre un arbitraggio di tipo B è un portafoglio $\bar{\alpha}$ per il quale è

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{p} \rangle < 0 \qquad X\bar{\alpha} \geq \bar{0}. \tag{39}$$

Il significato delle due specie di arbitraggio è immediatamente interpretabile: per quello di tipo A si ha che esiste un portafoglio di costo nullo che almeno ad una scadenza fornisce un entrata senza mai dare luogo a uscite; l'arbitraggio di tipo B consiste nella possibilità di costruire un portafoglio di costo negativo (vale a dire che all'istante t si incassa un definito importo) che non dà luogo ad alcun esborso alle epoche future.

E' anche agevole provare che l'esistenza di una opportunità di arbitraggio di tipo B implica l'esistenza di opportunità di arbitraggio di tipo A. Infatti essendo $\langle \bar{\alpha}, \bar{p} \rangle = c < 0$ investendo l'importo c nell'acquisto di uno zcb con scadenza qualunque, o in un titolo che non dà luogo ad esborsi futuri, si ottiene un nuovo portafoglio a costo nullo e con almeno una scadenza caratterizzata da un importo strettamente positivo.

Prima di formulare il teorema che stabilisce le condizioni di equilibrio del mercato (ovvero della assenza di opportunità di arbitraggio) è possibile dare una regola operativa (traducibile in poche linee di istruzioni in MAPLE V) in base alla quale verificare se una determinata struttura del mercato, definita da un paniere fondamentale e dal vettore dei prezzi dei titoli negoziabili, presenta opportunità di arbitraggio.

Infatti si consideri un generico portafoglio $\bar{\alpha}$ e sia il suo costo:

$$\langle \bar{\alpha}, \bar{p} \rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j \alpha_j \tag{40}$$

imponendo la condizione che il flusso generato dal portafoglio non comporti esborsi si ha:

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \ldots + \alpha_n x_{1n} \geq 0 \\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_n x_{2n} \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 x_{m1} + \alpha_2 x_{m2} + \ldots + \alpha_n x_{mn} \geq 0 \end{cases} \tag{41}$$

il problema di minimo vincolato:

$$\min_{\overline{\alpha} \in R^n} \sum_{j=1}^{n} p_j \alpha_j$$

$$\begin{cases} \alpha_1 x_{11} + \alpha_2 x_{12} + \ldots + \alpha_n x_{1n} \geq 0 \\ \alpha_1 x_{21} + \alpha_2 x_{22} + \ldots + \alpha_n x_{2n} \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1 x_{m1} + \alpha_2 x_{m2} + \ldots + \alpha_n x_{mn} \geq 0 \end{cases}$$

se ammette la sola soluzione $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ allora non vi sono opportunità di arbitraggio in quanto il portafoglio con il costo minimo e che non dà luogo ad esborsi futuri è quello che non contiene alcun titolo. Questo portafoglio (ovviamente) genera un flusso nullo. Qualunque altro portafoglio che alle epoche future, senza dare luogo ad esborsi, produca almento un introito ha un costo maggiore di zero e ciò conferma l'assenza di opportunità di arbitraggio.

In presenza di opportunità di arbitraggio, si avrebbero portafogli a costo negativo (corrispondenti ad introiti) che potrebbe essere reso grande a piacere dilatando le compnenti corrispondenti. Il problema di minimo sarebbe in tal caso privo di soluzioni finite.

In conclusione, impostando il problema di minimo vincolato in MAPLE V (utilizzando il pacchetto simplex), se non si ottengono soluzioni (linea di risposta vuota) allora sono presenti opportunità di arbitraggio, mentre queste sono assenti se la soluzione ottenuta è identicamente nulla.

Il teorema seguente sancisce le condizioni per l'equilibrio del mercato.

Teorema 5 (Primo Teorema sulla Assenza di Arbitraggi) In un mercato definito all'istante t dalla matrice X che rappresenta il paniere fondamentale e dal vettore dei prezzi $\overline{p}$ non sono presenti opportunità di arbitraggio se e solo se esiste un vettore $\overline{v}$ a componenti strettamnete positive tale che:

$$\overline{p} = \overline{v}^T X. \tag{42}$$

Si dimostra intanto che l'esistenza del vettore $\overline{v}$ è condizione sufficiente affinchè non si presentino opportunità di arbitraggio.

Si ipotizzi che $\overline{v}$ esista.e che al contempo sussistano opportunità di arbitraggio. Si ha quindi

$$\langle \bar{p}, \bar{\alpha} \rangle = \langle \bar{v}^T X, \bar{\alpha} \rangle = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{i2} \\ \cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{in} \end{pmatrix} \bar{\alpha}^T = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_i \alpha_j x_{ij} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \bar{v}_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{ij} = \langle \bar{v}, X\bar{\alpha} \rangle$$

Poichè assumere che vi siano opportunità di arbitraggio significa che il membro di sinistra è non positivo, mentre il membro di destra è non negativo (per effetto delle (38) e (39)), affinchè valgano ambedue le relazioni deve essere

$$\langle \bar{p}, \bar{\alpha} \rangle = \langle \bar{v}, X\bar{\alpha} \rangle = 0$$

e poichè $\bar{v}$ è un vettore a compnenti strettamente positive, affinchè il prodotto scalare $\langle \bar{v}, X\bar{\alpha} \rangle$ sia nullo, deve essere $X\bar{\alpha} = \bar{0}$. Ma ciò, unitamente all'essere $\langle \bar{p}, \bar{\alpha} \rangle = 0$, comporta assenza di arbitraggi contro l'ipotesi.

Dunque la contemporanea esistenza del vettore $\bar{v}$ e di opportunità di arbitraggi conduce ad una contraddizione.

Per dimostrare che l'esistenza di $\bar{v}$ è anche condizione necessaria, occorre introdurre il concetto di cono convesso.

Definizione 6 (Cono Convesso) Dato un insieme di k vettori di R^m: $M = \{\bar{M}^1, \ldots \bar{M}^k\}$, è detto cono convesso l'insieme dei vettori $\bar{y}$ che possono essere espressi come combinazioni lineari, a coefficienti strettamente positivi, dei vettori di M. In simboli, il cono convesso è l'in sieme C così definito:

$$C = \left\{ \bar{y} : \bar{y} = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{M}^j, \;\; z_j > 0 \right\}. \qquad (43)$$

La chiusura $\bar{C}$ di C contiene tutti i vettori di M oltre all'origine $\bar{0}$.

Si faccia ora l'ipotesi che per il mercato considerato non esista il vettore $\bar{v}$. Se $\bar{C}$ è la chiusura del cono convesso generato dai vettori colonna di X, allora $\bar{C}$ è non vuoto, convesso, e non contiene il vettore $\bar{p}$. Se così fosse infatti, esisterebbe un vettore $\bar{z}$ a componenti strettamente positive tale che $\bar{p} = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{x}^j$, avendo indicato con $\bar{x}^j$ i vettori colonna di X. Ma ciò equivale proprio a porre che esista il vettore $\bar{v} = \bar{z}$.

A questo punto è necessario introdurre un nuovo teorema, noto come il teorema dell'iperpiano separatore. La forma nella quale esso è presentato è quella che più si adatta allo sviluppo della dimostrazione in corso.

Teorema 7 (Teorema dell'Iperpiano Separatore) Dato un insieme convesso C ed un punto $\bar{Q}$ che non vi appartiene, allora esiste un iperpiano $H = \{\bar{x} : \langle\bar{\beta}, \bar{x}\rangle = a\}$ tale che

$$\langle\bar{\beta}, \bar{Q}\rangle \leq a \leq \langle\bar{\beta}, \bar{y}\rangle \quad \forall \bar{y} \in C. \tag{44}$$

Tornando ora alla dimostrazione, essendo $\bar{C}$ convesso e non contenendo per ipotesi $\bar{p}$, per il teorema dell'iperpiano separatore, esiste un iperpiano H in R^m che separa $\bar{p}$ e $\bar{C}$. Ovvero, esiste un vettore $\bar{\beta}$ in R^m tale che, tutti i vettori $\bar{x}$ che verificano la relazione $\langle\bar{\beta}, \bar{x}\rangle = a$ costituiscono un iperpiano (uno spazio affine a $m - 1$ dimensioni) per il quale vale la disugualianza:

$$\langle\bar{\beta}, \bar{p}\rangle \leq a \leq \langle\bar{\beta}, \bar{y}\rangle \quad \forall \bar{y} \in C. \tag{45}$$

Essendo $\bar{C}$ un cono che contiene l'origine è facile vedere che in questo caso deve essere $a = 0$.

Si consideri infatti un qualunque vettore $\bar{y} \in \bar{C}$ e $\mu \geq 0$. Anche $\mu\bar{y} \in \bar{C}$, ed inoltre

$$a \leq \langle\bar{\beta}, \mu\bar{y}\rangle = \mu \langle\bar{\beta}, \bar{y}\rangle. \tag{46}$$

Poichè si considera la chiusura del cono la (46) deve valere anche per $\mu = 0$, e quindi è $a \leq 0$ e anche $\langle\bar{\beta}, \bar{p}\rangle \leq 0$.

Essendo poi $a \leq \mu \langle\bar{\beta}, \bar{y}\rangle$ è anche $\frac{a}{\mu} \leq \langle\bar{\beta}, \bar{y}\rangle$ e passando al limite si ottiene:

$$\lim_{\mu\to\infty} \frac{a}{\mu} = 0 \leq \langle\bar{\beta}, \bar{y}\rangle$$

In conclusione, qualunque sia $\bar{y} \in \bar{C}$ deve essere $\langle\bar{\beta}, \bar{p}\rangle \leq 0 \leq \langle\bar{\beta}, \bar{y}\rangle$, ed in particolare, per ogni vettore colonna di X è:

$$\langle\bar{\beta}, \bar{p}\rangle \leq 0 \leq \langle\bar{\beta}, \bar{x}^j\rangle. \tag{47}$$

Si deve poi escludere che sia $\langle\bar{\beta}, \bar{p}\rangle = \langle\bar{\beta}, \bar{x}^j\rangle = 0$ per ogni j, perchè in tal caso verrebbe violata la proprietà di separazione.

Così se è $\langle\bar{\beta}, \bar{p}\rangle = 0$ deve essere $\langle\bar{\beta}, \bar{x}^j\rangle > 0$ per qualche j e dunque $\bar{\beta}$ rappresenta un portafoglio che consente opportunità di arbitraggio. Resta così provato che in assenza di un vettore $\bar{v}$ a componenti strettamente positive vi è la possibilità di costruire arbitraggi. Con ciò il teorema è dimostrato.

Si noti intanto che il teorema 7 fornisce condizioni per l'assenza di opportunità di arbitraggio che sono dipendenti unicamente dalla esistenza di $\bar{v}$ e non dalla sua unicità. Questa ultima condizione, come sarà chiarito più avanti, consente di passare dalla assenza di arbitraggio all'equilibrio del mercato (connotato da assenza di arbitraggi e da unicità del prezzo).

E' interessante a questo punto soffermarsi sul significato finanziario del vettore $\bar{v}$, sinora genericamente definito come un vettore a componenti strettamente positive. Dalla relazione di $\bar{v}$ con i prezzi dei titoli risulta che, considerato il flusso di un generico titolo $\bar{x}^j = (x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj})$, si ha:

$$p_j = v_1 x_{1j} + v_2 x_{2j} + ... + v_m x_{mj} \tag{48}$$

e quindi il prezzo di un titolo è legato al flusso da questo prodotto attraverso le componenti di $\bar{v}$, fattori per i quali ciascuna posta del flusso deve essere moltiplicata. Poichè l'importo p_j che rappresenta il prezzo è un importo riferito all'istante iniziale t, mentre gli elementi $x_{1j}, x_{2j}, ..., x_{mj}$ del flusso sono riferiti agli istanti $t_1, t_2, ..., t_m$, i fattori $v_1, v_2, ..., v_m$ vanno interpretati come fattori che trasformano importi esigibili ad istanti futuri in equivalenti importi riferiti alla data iniziale t, di modo che sia coerente la relazione di ugualianza (48) che deriva dal teorema 7.

Le componenti di $\bar{v}$ rappresentano dunque i fattori di attualizzazione impliciti in un mercato nel quale sono escluse opportunità di arbitraggio.

Si consideri ora uno zcb con scadenza all'istante t_i. Il flusso da questo generato è $\bar{x}^k = (0, ...1, ...0)$ e se si indica con $P(t, t_i)$ il suo prezzo, sempre in virtù del teorema 7, deve essere:

$$P(t, t_i) = v_i . \tag{49}$$

Questa ultima relazione esprime dunque il fatto che le componenti di $\bar{v}$ vanno interpretate come prezzi di zcb e conseguentemente i fattori di attualizzazione coincidono, nelle ipotesi del teorema 7, con i prezzi di zcb.

Se si pongono ora le condizioni di complertezza del mercato (vale a dire un paniere fondamentale con tanti titoli quante sono le scadenze), allora il vettore $\bar{v}$ è unico ed i prezzi dei titoli risultano univocamente determinati dai prodotti scalari $\bar{v} ® \bar{x}^j = p_j$. Il mercato in tale caso risulta in equilibrio e prezzi dei titoli vengono definiti prezzi di equilibrio.

E' anche interessante mettere in evidenza che in un mercato in equilibrio la struttura per scadenza $P(t, t_1), P(t, t_2), ..., P(t, t_m)$ risulta comunque definita indipendentemente dalla materiale esistenza degli zcb: è infatti $P(t, t_j) = v_j$. Nella proposizione seguente vengono riassunti i risultati ottenuti.

Proposizione 8 Sia X il paniere fondamentale rilevato all'istante t in un mercato completo nel quale non esistono opportunità di arbitraggio. Allora le componenti del vettore $\bar{v} = (v_1, v_2, .., v_m)$, tale che $\bar{p} = \bar{v}^T X$ rappresentano la struttura per scadenza del mercato.

Il risultato contenuto nel teorema 7, come pure la stessa tecnica dimostrativa, hanno una valenza più generale di quella qui rappresentata, relativa al contesto di un mercato di obbligazioni in equilibrio. Se si considera un mercato uniperiodale nel quale all'istante iniziale t sono negoziabili n titoli rischiosi, il cui valore alla fine del periodo (all'istante T) dipende da quale fra m possibili stati del mondo si presenta, allora la stessa matrice X può essere interpretata quale matrice dei risultati forniti da ciascun titolo nei diversi possibili stati del mondo che si è assunto possano verificarsi (un esempio particolarmente semplice è quello nel quale i titoli in questione sono azioni delle quali è noto il prezzo odierno ed il cui prezzo alla fine del periodo considerato dipende da tre possibili stati del mondo: mercato stabile, mercato in rialzo, mercato in ribasso). Così l'elemento x_{ij} va interpretato come il prezzo che avrà il titolo j-mo se si verifica l'i-mo stato del mondo.

Il teorema dell'equilibrio continua a valere anche in questo contesto aleatorio, così come le difiinizioni di arbitraggio che si caratterizzano ora come portafogli a costo nullo che in almeno uno stato del mondo danno un risultato strettamente positivo e in ogni altro non negativo, ovvero portafogli a costo negativo che in ogni possibile stato del mondo danno risultati non negativi.

Non può tuttavia sfuggire una evidente differenza fra lo schema interpretativo derivato da mercato dei bonds e quello che si riferisce alla situazione di tipo aleatorio: il ruolo svolto dal tempo. Nel mercato dei titoli rischiosi il carattere uniperiodale del modello è esplicito, mentre nel modello dei bonds, avendo sostituito i diversi stati del mondo con le epoche di scadenza delle poste, viene inserita una apparente dimensione pluriperiodale. Solo apparente però, perchè è bene tenere presente che i modelli sono due interpretazioni del medesimo apparato formale il quale non può essere contemporaneamente uniperiodale e pluriperiodale. Infatti il modello del mercato dei bonds, affinchè i risultati del teorema 7 siano coerenti (fino a considerare il vettore $\overline{v}$ la struttura per scadenza del mercato) esige che siescluda il postulato di impazienza per il quale un importo ottenuto immediatamente è preferito allo stesso ottenibile in una epoca futura: ad imporlo sta il fatto che niente garantisce la decrescenza delle componenti v_i (prezzi di zcb con scadenze più lontane), come sarebbe richiesto dal postulato. Inoltre è facile dimostrare che se si dà alle scadenze un effettivo significato temporale, ammettendo così che gli importi riscossi ad una epoca possano essere trasferiti ad un'altra successiva, come accade nel mondo reale (si noti che nel modello parallelo non ha alcun senso trasferire un importo da uno stato del mondo ad un altro) allora possono sorgere opportunità di arbitraggio anche dove per il teorema 7 non ve ne sono.

Si consideri il seguente semplice esempio.

Esempio 9 Sia $X = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 103 & 11 \\ 0 & 111 \end{pmatrix}$ il paniere fondamentale relativo a due titoli che effettuano pagamenti su tre periodi (il mercato non è quindi completo) mentre i prezzi dei due titoli siano rappresentati dal vettore $\overline{p} = (90, 130)$.

Impostando il problema di ottimizzazione vincolata si ottiene:

$$\max_{\alpha_1,\alpha_2} -(90\alpha_1 + 130\alpha_2)$$
$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 11\alpha_2 \geq 0 \\ 103\alpha_1 + 11\alpha_2 \geq 0 \\ 111\alpha_2 \geq 0 \end{cases}$$

la cui soluzione, come si verifica facilmente è: $\overline{\alpha} = (0, 0)$.

Dunque così come il problema è impostato, il mercato non presenta opportunità di arbitraggio. Si introduca ora l'elemento tempo in modo che sia un elemento effettivo del modello, consentendo quindi il trasferimento di un importo da un periodo ad un altro. Questo significa che al tempo iniziale t è possibile trasferire un importo z_0 alle epoche successive (un debito da coprire con gli introiti futuri o un esborso con il quale anticipare impegni futuri) mentre alle date future si dovrà provvedere alla regolazione di questa posta, potendo inoltre effettuare ulteriori trasferimenti. Così alla prima scadenza l'importo z_0 entra nella disequazione del flusso (con il segno cambiato) ed un altro importo z_1 è suscetibile di essere trasferito alla epoca successiva, e così via per tutte le scadenze successive.

Nell'esempio analizzato si ha così:

$$\max_{\alpha_1,\alpha_2,z_0,z_1,z_2} -(90\alpha_1 + 130\alpha_2 + z_0)$$

$$\begin{cases} 3\alpha_1 + 11\alpha_2 + z_0 - z_1 \geq 0 \\ 103\alpha_1 + 11\alpha_2 + z_1 - z_2 \geq 0 \\ 111\alpha_2 + z_2 \geq 0 \\ z_0 \geq 0,\ z_1 \geq 0\ z_2 \geq 0 \end{cases}$$

Cercando la soluzione, al solito tramite l'impiego di MAPLE V, questa volta non si ottiene risposta alcuna. Per quanto visto più sopra ciò significa che l'estremo è illimitato e quindi il mercato presenta opportunità di arbitraggio, opportunità che non emergevano in un mercato nel quale il tempo non svolgeva alcun ruolo effettivo, limitandosi ad essere semplicemente una etichetta con la quale connotare le poste.

Nel caso specifico il portafoglio $\overline{\alpha} = \left(\frac{119}{87}, -1\right)$ rappresenta un arbitraggio. Infatti all'istante t si ha un introito pari a $(-90)\left(\frac{119}{87}\right) + 130 = \frac{200}{29}$ importo positivo che se trasferito al periodo successivo (anche in assenza di remunerazione) contribuisce a rendere il bilancio della situazione pari a $3\left(\frac{119}{87}\right) - 11 + \frac{200}{29} = 0$, mentre al secondo periodo si ha $103\left(\frac{119}{87}\right) - 11 = \frac{11\,300}{87}$ e al terzo, infine, $-111 + \frac{11300}{87} = \frac{1643}{87}$.

Come si vede con questa strategia di portafoglio, utilizzando l'eccedenza formatasi all'istante iniziale per finanziare gli impegni che si presentano al primo periodo, si ottiene al secondo periodo un introito che può essere utilizzato nel terzo per fare fronte all'ultimo pagamento, lasciando inoltre una disponibilità netta pari a $\frac{1643}{87} = 18.885$.

L'esempio mette in evidenza l'inadeguatezza del teorema 7 a rappresentare una situazione di mercato che riproduca con qualche aderenza la realtà. Introdurre il tempo come elemento effettivo del modello significa modificarne la natura introducendo nuovi elementi che il semplice schema analizzato non contiene. Significa inoltre introdurre ulteriori vincoli con i quali tradurre l'esigenza che la struttura per scadenza dei prezzi risulti decrescente con l'allontanarsi delle scadenze. Il teorema 7 può dunque essere modificato nel modo seguente:

In un mercato definito all'istante t dalla matrice X che rappresenta il paniere fondamentale e dal vettore dei prezzi $\overline{p}$ non sono presenti opportunità di arbitraggio se e solo se esiste un vettore $\overline{v}$ a componenti strettamnete positive tale che:

$$\bar{p} = v^{-T} X \qquad (50)$$
$$v_{j+1} < v_j$$
$$v_1 < 1$$

Senza entrare nei dettagli, menzionando unicamente il fatto che la dimostrazione si basa ancora sul teorema dell'iperpiano separatore o teoremi ad esso collegati, come il lemma di Farkas, si può provare che il risultato del teorema 4 può essere tradotto in un problema di ottimo vincolato nel modo seguente.

Teorema 10 In un mercato definito all'istante t dalla matrice X che rappresenta il paniere fondamentale e dal vettore dei prezzi $\bar{p}$ non sono presenti opportunità di arbitraggio se e solo se il massimo

$$\max_{(\bar{\alpha},\bar{z})\in R^{n+m}} \sum_{j=1}^{n} -p_j \alpha_j - z_0$$

con i vincoli:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{ij} + z_{i-1} - z_i \geq 0 \qquad i = 1, ...m-1$$
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{mj} + z_{m-1} \geq 0$$
$$z_0 \geq 0,\ z_1 \geq 0, ...,\ z_{m-1} \geq 0$$

è zero.

Nelle nuove condizioni per l'assenza di arbitraggio definite dal teorema 4 è possibile dare le condizioni per l'equilibrio del mercato (con conseguente unicità della struttura per scadenza) imponendo ancora la completezza, così come stabilisce la proposizione 8. Le conclusioni generali legate a questa ultima, in particolare il ruolo dei prezzi degli zcb quali fattori di attualizzazione in un mercato in equilibrio, si trasferiscono così immediatamente al contesto presente.

E' ora possibile dare il giusto significato ai termini presentati nell'esempio che apre il capitolo presente. La relazione che deve legare il prezzo V = 1021.82 del bullet bond ai prezzi degli zcb:

$$1021.82 = 0.9426\ (500) - 0.8840\ (250) - 0.8238\ (400)$$

non esprime altro che il fatto che la valutazione del prezzo di equilibrio del titolo con cedole deve essere effettuata scontando gli elementi del flusso con fattori che sono proprio i prezzi degli zcb che hanno le scadenze corrispondenti. Da quanto sin qui esposto emerge anche che, sotto ipotesi di completezza, non è necessario che gli zcb siano effettivamente negoziati: potendone replicare il flusso con opportuni portafogli costruiti a partire dagli altri titoli presenti, i loro prezzi, non direttamente quotati sul mercato, sono implicitamente definiti dal mercato stesso nel suo complesso come componenti del vettore $\bar{v}$

5 Metodologie di Stima della Struttura per Scadenza.

Nel paragrafo presente si darà una succinta panoramica di alcuni metodi classici per la costruzione di curve dei rendimenti a partire dall'evidenza empirica rilevabile dal mercato. L'esigenza di colmare le lacune rispetto all'orizzonte temporale delle scadenze ed il dover utilizzare titoli impuri come quelli che portano cedole (anzichè ricorrere esclusivamente a zcb) generano i problemi teorici di maggior rilievo. Problematiche ancora più complesse sorgono da eventuali differenze nei regimi di imposizione che possono trattare diversamente zcb e titoli con cedola. Inoltre, in quasi tutti i mercati, società e soggetti privati sono sottoposti a criteri di tassazione diversi così che finisce con l'essere complicato anche definire univocamente il concetto di rendimento netto.

Poichè i metodi che verranno presentati hanno tutti in comune la particolarità di cercare di estrarre dalle quotazioni effettive dei titoli la sottostante struttura (prezzi o rendimenti), la prima difficoltà che si incontra riguarda la scelta dei titoli dai quali partire per effettuare le elaborazioni. Il criterio della massima omogeneità è il principio base al quale far ricorso se si vogliono evitare risultati fortemente distorti. Omogeneità significa che i titoli selezionati devono essere quanto più possibile "simili" secondo diversi criteri. Uno, quello principale, riguarda la rischiosità degli stessi. Mescolare obbligazioni emesse da società private e titoli del debito pubblico darebbe certamente luogo a modelli fortemente distorti in quanto il diverso rischio intrinseco (legato alla solvibilità degli emittenti) ne influenza certamente il rendimento e di riflesso il prezzo corrente. Sotto questo aspetto il mercato italiano, presentando un buon numero di titoli emessi dallo Stato, suggerisce che siano solo questi ultimi ad essere presi in considerazione. Ma anche all'interno dei titoli pubblici possono manifestarsi sensibili differenze per quanto riguarda la liquidità. Basta osservare i rendimenti di titoli abbastanza simili, sia per scadenza che per cedola, per accorgersi che gli investitori hanno preferenze particolari che li spingono verso alcuni a discapito di altri. Ciò può dipendere dalla diversa liquidità dei titoli, fattore che li rende piò o meno facilmente negoziabili e conseguentemente più o meno appetiti. La liquidità può dipendere dal volume complessivamente circolante, dipendente a sua volta dal volume emesso o dal fatto che alcune emissioni sono tenute presso le banche come riserva o altro, venendo così sottratte al mercato. Come si vede, già a questo primo stadio, sorgono diverse delicate questioni e solo una buona pratica del mercato può indirizzare verso le giuste scelte. E' buon criterio quello di scegliere titoli dello Stato con i più alti volumi negoziati, segnale questo di una loro buona liquidità.

Una volta individuato l'insieme dei titoli che verrà a costituire il paniere di base dell'elaborazione la successiva decisione strategica riguarda la scelta dei dati in base ai quali si intende operare: è preferibile costruire una struttura per scadenza dei prezzi, giungendo a definire la funzione di s, v (t, s), oppure una curva dei rendimenti tipo la h (t, s) o i (t, s)? Evidentemente, in base alle relazioni viste nei paragrafi precedenti, da una struttura è agevole ricavarsi ogni altra per cui è relativamente indifferente il punto di partenza. In genere guida il criterio della forma funzionale che si vuole adattare o l'economia di calcoloLa maggior parte degli studi su questo argomento si sono orientati nella direzione dei prezzi, seguendo in ciò il primo approccio del 1973, dovuto a Mc Culloch.

Infine, una ulteriore decisione strategica,di natura più tecnica, riguarda la scelta del tipo di curva con la quale si intende modellare la struttura. A questo proposito occorre tenere presente la doppia esigenza di ottenere un prodotto che sia al contempo di buon uso pratico (smoothness) e sufficientemente flessibile da adattarsi ai dati reali (effectivness).

5.1 Metodo del Bootstrapping.

Il cosidetto metodo del bootstapping può essere considerato la versione numerica di un modello di equilibrio riferito ad un mercato completo (nel quale cioè il numero delle scadenze significative non eccede il numero dei titoli negoziabili). Questo metodo, presentato nei testi di bond analysis come il metodo empirico più semplice per generare una struttura dei rendimenti, si fonda su ipotesi che ben difficilmente possono essere soddisfatte da un qualche mercato reale. Infatti, oltre a richiedere la proprietà di completezza,l'applicazione del bootstrapping è possibile solo se le scadenze sono equintervallate (siano cioè multiple della stessa unità temporale, quale ad esempio il semestre). Con questo metodo, a partire dai prezzi di mercato di un insieme di titoli che coprono, con le date di scadenza dicedole e del rimborso finale, uno scadenziario equintervallato, si giunge ad individuare direttamente una sequenza discreta di indici di rendimento (o di fattori di attualizzazione). Osservando però un qualunque listino, risulta evidente che la richiesta regolarità delle scadenze non è possibile ottenerla, qualunque sia il criterio di scelta dei titoli da inserire nel paniere. E che le scadenze non possano susseguirsi con regolarità ciò appare del tutto ovvio non appena si consideri il fatto che le varie emissioni, pur assumendo il semestre come unità temporale per il pagamento delle cedole e del capitale, non partono nello stesso giorno dell'anno.Quindi, pur avendo lo stesso passo, finiscono poi per marciare disallineate.

Comunque, nonostante la sua valenza eminentemente teorica, il metodo del bootstrapping merita una menzione sia per la sua idoneità ad essere implementato tramite semplici procedure ricorsive, che per la possibilità di adattarlo (con qualche opportuno ritocco ai dati originari) a situazioni più aderenti ai mercati reali. Si vedrà più oltre che in particolari mercati, quali quelli degli SWAPS, la metodolgia in questione è applicabile con successo e costituisce lo strumento universalmente usato per dedurre la struttura per scadenza.

L'idea che sta alla base del metodo del bootstrapping è quella di considerare un titolo provvisto di cedola alla stregua di un portafoglio di zcb: acquistare, al prezzo di mercato P, un titolo che dia diritto alla riscossione per n periodi, di cedole di ammontare C ed al rimborso del capitale K al termine degli n periodi, è considerato equivalente ad acquistare un portafoglio contenente uno zcb di valore finale C scadente dopo un periodo, un altro dello stesso valore finale scadente dopo due periodi, e così via fino all'ultimo zcb di valore $(C + K)$. La proprietà di linearità del valore (ovvero la condizione di non arbitraggio alla quale questa proprietà può ricondursi), impone che prezzo del titolo e dell'ipotetico portafoglio coincidano:

$$P = C \sum_{j=1}^{n} v(0, j) + Kv(0, n) \qquad (51)$$

dove i $v(0, j)$ rappresentano i fattori di sconto (ovvero i prezzi $P(0, j)$ di ipotetici zcb unitari riferiti all'istante iniziale $t = 0$) che devono essere determinati.

Si ponga ora che per le scadenze più vicine, ad esempio le prime k, sul mercato siano trattati zcb unitari: prezzi di questi titoli forniscono parte della struttura per scadenza dei prezzi: $P(0, 1) = v(0, 1)$, $P(0, 2) = v(0, 2)$,..., $P(0, k) = v(0, k)$. Il primo titolo con cedola abbia così scadenza in $t = k + 1$, per cui, in base alla (51), indicando con p^{k+1} il prezzo (noto) di questo titolo e ponendo $y_{k+1} = v(0, k + 1)$, e indicando con C^{k+1} la cedola corrispondente, è sufficiente risolvere rispetto a y_{k+1} la semplice equazione:

$$C_{k+1} \sum_{i=1}^{k} v(0, i) + (C_{k+1} + K)\, y_{k+1} - p^{k+1} = 0. \qquad (52)$$

Una volta individuato $v(0, k + 1) = y_{k+1}$ si passa al titolo con la scadenza successiva, e così via fino a completamento dello scadenziario.

La struttura dei rendimenti a scadenza, $h(0, 1), h(0, 2), ..., h(0, n)$ è ricavabile in base alla relazione (6), così come la struttura dei tassi a pronti $i(0, j)$, in base alla (??). Poichè ususalmente è proprio quest'ultima la struttura che interessa, è immediato costruire una relazione ricorrente in grado di fornire ciascun elemento in funzione dei precedenti già calcolati. Infatti, supposti noti i primi k tassi: $i(0, 1), ..., i(0, k)$ applicando congiuntamente la (52) e la (??) si ottiene:

$$i(0, k + 1) = \left\{ \frac{K + C_{k+1}}{p^{k+1} - C_{k+1} \sum_{j=1}^{k} [1 + i(0, j)]^{-j}} \right\}^{\frac{1}{k+1}} - 1 \qquad (53)$$

E' ora agevole reinterpretare il metodo del bootstrapping, corredato delle ipotesi necessarie alla sua applicazione, come semplice problema di algebra lineare. In questa versione ricevono maggiore enfasi le condizioni di applicabilità della procedura, ed inoltre si vede anche come l'esistenza sul mercato, di almeno uno zcb, sia una ipotesi ridondante.

Usando la notazione matriciale, ove X^T rappresenta la matrice dei flussi dei titoli presi in considerazione (le righe rappresentano i flussi dei diversi titoli):

$$X^T = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ C_2 & C_2 + K_2 & 0 & ... & 0 \\ C_3 & C_3 & C_3 + K_3 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ C_n & C_n & C_n & ... & C_n + K_n \end{pmatrix}$$

il vettore $\bar{v} = [v(0, 1), v(0, 2), ..., v(0, n)]$ la struttura che si vuole determinare, mentre $\bar{p} = [p^1, p^2, ...p^n]$ è il vettore dei prezzi dei titoli, il problema in esame si riduce alla soluzione, rispetto a $\bar{v}$, del seguente sistema lineare $X\bar{v} = \bar{p}$:

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ C_2 & C_2 + K_2 & 0 & ... & 0 \\ C_3 & C_3 & C_3 + K_3 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ C_n & C_n & C_n & ... & C_n + K_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(0, 1) \\ v(0, 2) \\ v(0, 3) \\ . \\ v(0, n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ . \\ p_n \end{pmatrix} \qquad (54)$$

E'immediato riconoscere nella (54) la riduzione nella forma a scala di un sistema lineare. In effetti, ripercorrendo le fasi del metodo del bootstrapping, si riconoscono i passi della soluzione di un sistema lineare già ridotto a scala. Dunque quella tecnica non è altro che quella standard di soluzione di sistemi lineari di n equazioni in n incognite. In realtà, come è stato accennato più sopra, l'esistenza di almeno uno zcb sul mercato non è condizione necessaria per ricavare la struttura per scadenza, basta infatti che vi sia almeno una posta che scade al primo periodo. Naturalmente niente garantisce a priori che il sistema (54) ammetta soluzione ed è interessante soffermarsi sul significato, in termini di equilibrio del mercato, della esistenza o meno di soluzioni. Intanto occorre mettere in evidenza che la matrice X deve essere una matrice quadrata, dato che l'applicabilità del metodo in esame richiede proprio un numero di titoli uguale al numero delle scadenze. L'esistenza di soluzioni discende poi direttamente dal teorema di Rouchè-Capelli, ovvero dal valore che assume la caratteristica della matrice X. Qualora X sia una matrice di pieno rango, la soluzione è unica e quindi esiste un vettore di prezzi di zcb il quale fornisce la struttura cercata. Per ogni titolo considerato, attualizzando gli elementi del flusso con i fattori v(0, j), si otiene il prezzo di mercato del tittolo.

Tale condizione riflette l'equilibrio del mercato stesso, nel senso che non sono consentiti arbitraggi.

Qualora la caratteristica della matrice X sia minore di n, numero dei titoli (e delle scadenze), si presentano due alternative: o il vettore dei prezzi appartiene allo spazio generato dalle righe di X ed alora esistono infinite soluzioni (infinite strutture che consentono di ottenere tutti i prezzi dei tittoli come valori attualizzati dei loro flussi), oppure il vettore $\bar{p}$ dei prezzi non appartiene allo spazio generato dalle righe di X e non esistono soluzioni del sistema lineare. Il primo caso riflette una situazione nella quale un eccesso di strutture equivale a nessuna struttura, non potendosi individuare univocamente un insieme di fattori di attualizzazione con i quali prezzare gli strumenti del mercato. Almeno uno dei vettori riga di X (flusso di un titolo) è ottenibile come combinazione lineare di altri, e quindi quel titolo risulta ridondante e può essere eliminato dal paniere. Si noti che in questo caso l'esistenza di soluzioni del sistema implica che il prezzo di questo titolo ridondante è anche esso combinazione lineare (secondo i medesimi coefficienti dei flussi) dei prezzi degli altri titoli. Dunque un portafoglio costruito con i titoli che entrano nella combinazione lineare che riproduce il tiitolo ridondante costa esattamente come il titolo medesimo e non si possono con esso realizzare arbitraggi. Si ha ancora una situazione di equilibrio, solo che l'eleiminazione del titolo ridondante rende inapplicabile il metodo del bootstrapping (viene meno la condizione di coincidenza del numero delle scadenze e dei titoli) e ciò spiega l'indeterminatezza della soluzione, ovvero la impossibilità di individuare una struttura dei prezzi unica. Il caso nel quale il sistema non ammette soluzioni ($\bar{p}$ non appartiene allo spazio delle righe di X) implica che nessun insieme di fattori di attualizzazione è in grado di fare otternere tutti i prezzi dei titoli considerati come valore scontato dei rispettivi flussi. Il mercato nel suo insieme presenta così una fondamentale incoerenza ed è posibile dimostrare che in un contesto di questo tipo sono possibili strategie di arbitraggio. Il mercato non è in equilibrio, ed in questo caso, si parla di titoli mal prezzati ed il problema della struttura non ha senso porselo. Meglio sarebbe, in presenza di titoli mal prezzati, cercare di individuare le opportunità di arbitraggio presenti e trarne profitto...

Si può infine accennare brevemente a come sia possibile correggere i dati di partenza (sostanzialmente la asincronia delle scadenze) per adattare il metodo alle applicazioni concrete. Naturalmente è necessaria la massima cautela nel fare questo perchè, oltre a non esservi base teorica a fondare tali correzioni, vi è il rischio che le modifiche introdotte alterino la struttura del mercato portandolo fuori dall'equilibrio provocando malprezzamenti che rendono il sistema (54) privo di soluzioni.

Il modo più diretto per avere uno scadenziario ben fatto (cioè con le poste equintervallate) è quello di scegliere solo titoli che verificano tale condizione. Questa drastica soluzione spesso non è praticabile perchè in genere contrasta con gli obiettivi per i quali si vuole determinare la struttura, ed inoltre impone una scelta che potrebbe essere in conflitto con altri criteri (quello di avere omogeneità rispetto alla liquidità ad esempio). E' possibile, in alternativa, cercare di correggere le scadenze di alcuni titoli in modo da farle coincidere con quelle di base che sono condivise da una maggioranza dei titoli del paniere. Ovviamente anticipare o posticipare la scadenza di una cedola di qualche settimana non è la stessa cosa che farlo sul rimborso del capitale, dato il peso di gran lunga superiore che ha quest'ultimo sul valore globale del titolo. Per effettuare questi spostamenti occorre oviamente correggere l'ammontare delle poste, utilizzando opportuni fattori correttivi che non sono altro che dei fattori di attualizzazione. Ma per fare questo in modo coerente occorrerebbe disporre della struttura per scadenza che si sta tentando di costruire. Effettuate le modifiche alle poste per ricondurle ad uno scadenziario comune è necessario che quanto si ottiene rappresenti ancora un equilibrio, ovvero che le correzioni non abbiano introdotto opportunità di arbitraggio. In tal caso occorrerebbe ritoccare ulteriormente prezzi o poste. Come si vede per ovviare ad un inconveniente ci si trova intrappolati in uno nuovo e questo spiega la scarsa diffusione del metodo quando la struttura deve essere dedotta dal mercato dei bullet bonds. Tuttavia in contesti specifici nei quali è sufficiente una soluzione approssimata del problema, o quando, come per il mercato SWAPS, sussistono le condizioni di applicabilità, la semplicità della procedura è senza dubbio un argomento decisivo per la sua adozione.

Fra le soluzioni approssimate del metodo del bootstapping una trova largo uso presso gli operatori del mercato, ed è quella che fa ricorso alla interpolazione lineare.

Si supponga che, fissata in t l'epoca attuale, per le scadenze $t_1, t_2, \dots, t_k$ esistano gli zcb i cui prezzi forniscono i fattori di attualizzazione $v(t_0, t_1), \dots, v(t_0, t_k)$. Si consideri poi il primo titolo con cedola e sia $t_{k+1} > t_k$ la sua scadenza e sia C^1 l'ammontare delle sue cedole.

Si considerino intanto quelle scadenti prima di t_k. Poichè queste, in generale, avranno scadenze diverse dalle epoche $t_1, t_2, \dots, t_k$ per le quali sono noti i fattori di attualizzazione, i corrispondenti fattori li si ottengono per interpolazione utilizzando il fattore noto immediatamente precedente e quello immediatamente successivo. Per chiarire le idee, sia τ una generica scadenza della cedola C^1, con $t_{h-1} < \tau < t_h$. Interpolando fra i due fattori (noti) $v(t, t_{h-1})$ e $v(t, t_h)$ si ottiene $v(t, \tau)$:

$$v(t, \tau) = v(t, t_{h-1}) + [v(t, t_h) - v(t, t_{h-1})] \frac{\tau - t_{h-1}}{t_h - t_{h-1}}. \qquad (55)$$

Nel caso vi siano cedole scadenti successivamente a t_k, cioè se è $t_k < \tau < t_{k+1}$, allora l'interpolazione viene effettuata fra i fattori che corrispondono a queste due scadenze, tenendo conto che $v(t, t_{k+1})$ non è ancora stato determinato e dunque $v(t, \tau)$ sarà espresso in funzione di questo:

$$v(t, \tau) = v(t, t_k) + [v(t, t_{k+1}) - v(t, t_k)] \frac{\tau - t_k}{t_{k+1} - t_k} \qquad (56)$$

Ponendo infine che le cedole abbiano scadenze $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ e che i corrispondenti fattori di attualizzazione siano stati ottenuti nel modo indicato, si procede come indicato dalla (52) inpostando l'equazione:

$$C^1 \sum_{j=1}^{s} v(t, \tau_j) + \left(C^1 + K\right) y_{k+1} - p^{k+1} = 0$$

e risolvendo rispetto alla incognita $y_{k+1} = v(t, t_{k+1})$.

Questo ultimo metodo, apparentemente laborioso, è anche esso di agevole applicazione non appena si sia costruito l'algoritmo corrispondente. Il paniere dei titoli utilizzato è in genere l'intera gamma dei BTP negoziati. Una volta costruito il programma, l'input per la sua prima applicazione è costituito, oltre che dalla data corrente di valutazione, dai dati relativi alla scadenza di ciascun titolo, la sua cedola ed il prezzo secco (poichè le cedole entrano nel computo non si deve tenere conto del rateo). Successive applicazioni dell'algoritmo richiederanno solo l'input del prezzo, salvo aggiungere periodicamente, man mano che avvengono nuove emissioni, i dati relativi ai nuovi titoli entrati nel mercato.

5.2 Un Metodo Polinomiale che Minimizza gli Errori.

Una alternativa al metodo del bootstrapping (integrato con l'interpolazione) è quello, per certi aspetti più flessibile, che fornisce una funzione continua quale struttura per scadenza attraverso un metodo che, utilizzando ancora i dati dei BTP quale base, adatta un polinomio ad un insieme arbitrario di dati minimizzando la somma dei quadrati degli scarti fra prezzi calcolati e prezzi effettivi.

Il metodo che ora verrà illustrato condurrà alla individuazione di una struttura per scadenza nel continuo adattando un polinomio ad un insieme arbitrario di dati con il metodo dei minimi quadrati. I risultati che si ottengono sono in genere soddisfacenti qualora si operi con un mixing adeguato fra numero dei titoli utilizzati e la lunghezza dell'orizzonte temporale. Inoltre va tenuto presente che disporre di una struttura per scadenza definita tramite una funzione liscia risulta molto utile ogni qual volta si utilizzino modelli di una certa complessità per valutare particolari titoli il cui valore dipende appunto dalla struttura per scadenza.

Siano n i tioli che si intendono utilizzare e sia $\bar{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$ il vettore dell'insieme di tutte le scadenze. Fra m ed n non si richiede alcuna particolare relazione. Sia X la matrice dei flussi (per colonna) generati dai titoli considerati. X è dunque una matrice m × n:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & .... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & .... & x_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ x_{m1} & x_{m2} & .... & x_{mn} \end{pmatrix}$$

mentre $\bar{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ è il vettore dei prezzi (tell quell). Posto che sia t l'istante iniziale di riferimento, si assume che la funzione v (t, s), la quale rappresenta la struttura per scadenza dei prezzi su uno scadenziario continuo. Per semplicità si considera la struttura per scadenza come una funzione della variabile $\tau = s - t$ che misura la distanza fra le scadenze e la data attuale. Ponendo che $v(\tau)$ sia ben rappresentabile da un polinomio di grado k, si pone:

$$v(\tau) = \beta_0 + \beta_1 \tau + \beta_2 \tau^2 + ... + \beta_k \tau^k. \qquad (57)$$

Si indichi poi con $\overline{T_j} = \left[1, \tau_j, \tau_j^2, ..., \tau_j^k\right]'$ il vettore di R^{k+1} le cui componenti sono le potenze della j − ma scadnza. Sia poi:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & .... & \tau_1^k \\ 1 & \tau_2 & .... & \tau_2^k \\ .... & .... & .... & .... \\ 1 & \tau_m & .... & \tau_m^k \end{pmatrix} \qquad (58)$$

In base alle posizioni fatte si ha che:

$$v(\tau_j) = \beta_0 + \beta_1 \tau_j + \beta_2 \tau_j^2 + ... + \beta_k \tau_j^k = \left\langle \bar{b}, \overline{T_j} \right\rangle$$

dove $\bar{b}$ è il vettore di R^{k+1} le cui componenti sono i coefficienti del polinomio che devono essere determinati $\bar{b} = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k)$.

Il vettore dei fattori di attualizzazione $\overline{V} = [v(0, \tau_1), v(0, \tau_2), ..., v(0, \tau_m)]$ lo si può esprimere come prodotto matriciale: $\overline{V} = T\,\bar{b}$.

Il vettore dei prezzi può essere ottenuto come valore attuale del flusso generato da ciascun titolo, a meno di un errore u_j: $p_j = \langle \bar{x}_j , \bar{v}(0, \tau_j) \rangle + u_j$, essendo $\bar{x}_j$ è il vettore del flusso generato dal $j-$mo titolo. L'errore u_j deriva dall'aver imposto la particolare forma polinomiale per i fattori di attualizzazione. E'quindi:

$$\bar{p} = X^T \bar{V} + \bar{u}. \tag{59}$$

E' poi:

$$\bar{u} = -X^T \bar{V} + \bar{p}. \tag{60}$$

Quadrando gli errori e sommando i quadrati si ottiene la funzione da minimizzare:

$$\begin{aligned} \varepsilon(b_1, b_2, ..., b_{k+1}) &= \bar{u}^T \bar{u} = \left(-X^T T \bar{b} + \bar{p}\right)^T \left(-X^T T \bar{b} + \bar{p}\right) = \\ &= \left[-\bar{b}^T T^T X + \bar{p}^T\right] \left(-X^T T \bar{b} + \bar{p}\right) = \\ &= \bar{b}^T T^T X X^T T \bar{b} - 2\bar{p}^T X^T T \bar{b} + \bar{p}^T \bar{p}. \end{aligned} \tag{61}$$

In quanto somma di quadrati la (61) ha minimo e quindi, per individuare il punto di minimo, sarà sufficiente annullare il gradiente di $\varepsilon\left(\bar{b}\right)$.

Si effettuino ora le sostituzioni seguenti: $\alpha = \bar{p}^T \bar{p}$, $\bar{h} = \bar{p}^T X^T T$, $Q = T^T X X^T T$. Si noti che $\bar{h}$ è un vettore a $k+1$ componenti e Q è una matrice simmetrica di ordine $k+1$. Infatti è: $Q = T^T X X^T T = \left(X^T T\right)^T \left(X^T T\right)$, ovvero Q è il prodotto di una matrice $(k+1) \times n$ per la sua trasposta. La (61) diventa così:

$$\varepsilon\left(\bar{b}\right) = \bar{b}^T Q \bar{b} - 2\bar{b}^T \bar{h} + \alpha. \tag{62}$$

Il termine $\bar{b}^T Q \bar{b}$ è una forma quadratica, sviluppando la quale si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} b_i b_j q_{ij} = \; & b_1^2 q_{11} + b_1 b_2 q_{12} + .. + b_1 b_{k+1} q_{1,k+1} + \\ & + b_2 b_1 q_{21} + b_2^2 q_{22} + .. + b_2 b_{k+1} q_{2,k+1} + \\ & + ... + \\ & + b_{k+1} b_1 q_{k+1,1} + b_{k+1} b_2 q_{k+1,2} + .. + b_{k+1}^2 q_{k+1,k+1} \end{aligned}$$

e derivando rispetto a b_i si ottiene:

$$\frac{\partial \left(\bar{b}^T Q \bar{b}\right)}{\partial b_i} = 2b_1 q_{i1} + 2b_2 q_{i2} + .. + 2b_{k+1} q_{i,k+1} = 2 \langle \bar{q}_i , \bar{b} \rangle \tag{63}$$

dove $\bar{q}_i$ è la $i-$ma riga della matrice Q. L'insieme delle derivate parziali di $\bar{b}^T Q \bar{b}$ può dunque essere scritto:

$$\frac{\partial \left(\bar{b}^T Q \bar{b}\right)}{\partial \bar{b}} = 2Q\bar{b}$$

ed essendo poi $\dfrac{\partial\left(2\bar{b}^{T}\bar{h}\right)}{\partial b_i} = 2h_i$, il sistema delle derivate parziali diventa:

$$\frac{\partial\, {}^{2}\left(\bar{b}\right)}{\partial \bar{b}} = 2Q\bar{b} - 2\bar{h} = \bar{0} \qquad (64)$$

ovvero:

$$Q\bar{b} = \bar{h} \qquad (65)$$

e sotto ipotesi di invertibilità della matrice Q, (se non così non fosse basterebbe arotondare un qualunque elemento di Q) è infine:

$$\bar{b} = Q^{-1}\,\bar{h}. \qquad (66)$$

Noti i coefficienti del polinomio $\upsilon(\tau) = \beta_0 + \beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + ... + \beta_k\tau^k$ è nota la struttura per scadenz:a dei prezzi ed ogni altra da essa ricavabile. Così, ad esempio se k = 3 avremo che $\upsilon(\tau) = \beta_0 + \beta_1\tau + \beta_2\tau^2 + \beta_3\tau^3$.

Nella soluzione proposta, in generale, non sarà verificato che per t = 0 sia anche v (0, 0) = v (0) = 1 come richiederebbe una fondamentale proprietà dei fattori di attualizzazione. Questo inconveniente spesso è di scarso rilievo poichè l'obiettivo che ci si propone costruendo una curva della struttura per scadenza è quello di effettuare valutazioni di poste che sono usualmente a scadenze sufficientemente lontane dall'istante iniziale. Tuttavia è possibile ottenere un risultato, anche formalmente corretto, semplicemente introducendo il vincolo $b_1 = 1$. In tal caso il problema della minimizzazione della somma dei quadrati degli scarti diventa un problema di minimo con vincolo:

$$\begin{cases} \min\limits_{\bar{b}\in R^{k+1}} {}^{2}\left(\bar{b}\right) \\ b_1 = 1 \end{cases} \qquad (67)$$

e la lagrangiana corrispondente è:

$$L\left(\bar{b}, \lambda\right) = {}^{2}\left(\bar{b}\right) - \lambda\,(b_1 - 1) = \bar{b}^{T} Q\bar{b} - 2\bar{b}^{T}\bar{h} + \alpha - \lambda\,(b_1 - 1) \qquad (68)$$

Le condizioni del primo ordine diventano in questo caso:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{b}} &= [2Q, \bar{c}]\begin{bmatrix} \bar{b} \\ \lambda \end{bmatrix} - 2\bar{h} = \bar{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= -b_1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ponendo $B = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \lambda \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 2Q & \bar{c} \\ \bar{c}^{T} & 0 \end{bmatrix}$, essendo $\bar{c}^{T} = (-1, 0, ..., 0)$ vettore di R^{k+1}, e $h = \begin{bmatrix} 2\bar{h} \\ -1 \end{bmatrix}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 2Q & \bar{c} \\ \bar{c}^{T} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{b} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\bar{h} \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (69)$$

ovvero:

$$\tilde{Q}\tilde{b} = \tilde{h} \qquad (70)$$

da cui, sotto condizione di invertibilità di $\tilde{Q}$, è infine:

$$\tilde{b} = \tilde{Q}^{-1}\,\tilde{h}. \qquad (71)$$

La scelta fra il metodo di minimizzazione con vincolo e quello senza vincolo dipende essenzialmente dal settore dello scadenziario al quale si è maggiormente interessati. Se si costruisce una curva della quale interessa essenzialmente il comportamento di breve-medio periodo, allora è da preferire il metodo vincolato, mentre se la si deve utilizzare prevalentemente su scadenze di lungo periodo si hanno migliori risultati con la minimizzazione non vincolata.

Esempio 11 Si consideri l'esempio seguente relativo ad un caso concreto riferito al mercato italiano nel quale si sono selezionati solo cinque BTP le cui scadenze non superano i tre anni, i cui dati essenziali sono riportati qui di seguito nella tabella 5 (i dati sono tratti dal listino del 27 marzo 2001). La struttura a termine che si vuole determinare è relativa alla data 26/03/2001.

Scadenza	Cedola	Scad. Cedole	Prezzo Tell Quell
01/09/01	6.00	01/05 − 01/11	103.573
01/05/02	6.00	01/05 − 01/11	112.596
15/01/03	2.25	15/01 − 15/07	101.367
15/06/03	2.50	15/06 − 15/12	102.958
01/01/04	4.25	01/01 − 01/07	112.662

TABELLA 5

Benchè il numero dei titoli scelti sia decisamente piccolo (l'intenzione è solo quella di illustrare una metodologia usando un semplice esempio), lo scadenziario completo dei cinque titoli comprende ben diciannove diverse epoche. Si comprende quindi che non è possibile, sia pure in un orizzonte temporale abbastanza ristretto ed utilizzando un paniere minimale, costruire alcuna struttra semplicemente risolvendo sistemi lineari. Lo scadenziario al quale fare riferimento, tradotto in decimale diventa:

$$\bar{t} = (0.097, 0.22, 0.26, 0.30, 0.43, 0.60, 0.72, 0.76, 0.8, 1.10, 1.2, 1.3, 1.301$$
$$1.7, 1.79, 1.8, 2.2, 2.3, 2.8)$$

il vettore dei prezzi tel quell è:

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 103.573 \\ 112.596 \\ 101.367 \\ 102.958 \\ 112.662 \end{pmatrix}$$

I dettagli dell' esempio sono sviluppati tramite MAPLE V nell'esercizio corrispondente. In conclusione il polinomio di terzo grado al quale si perviene, il quale fornisce la struttura per scadenza dei prezzi $v(t) = v(0, t)$ diventa in questo caso (si è scelta la procedura senza vincolo):

$$v(\tau) = .9972814 - .0519221\tau + .0124147\tau^2 - .00288539\tau^3.$$

Nel caso esaminato, poichè i dati che si sono utlizzati sono quelli relativi a BTP con scadenze estremamente vicine, il valore $v(0) = .997814$ è sufficientemente prossimo a uno e lo si può senz'altro accettare senza ricorrere all' ottimizzazione vincolata. Si possono ora calcorare i prezzi teorici dei BTP in base ai fattori di sconto ottenibili dalla funzione $v(t)$. Si indica con $\overline{v}$ il vettore a diciannove componenti (i fattori di attualizzazione sullo scadenziario dell'esempio) e si calcola il vettore $\overline{P}$ dei prezzi teorici:

$$\overline{P} = \overline{v}^T X$$

ottenendo:

$$\overline{P} = (103.5616996, 112.6278686, 101.2983574, 103.0167140, 112.6527500)$$

Come si può verificare confrontando il vettore $\overline{P}$ con quello dei prezzi effettivi $\overline{p}$, più sopra definito, l'approssimazione è decisamente buona. E' infatti:

$$Diff = \overline{p} - \overline{P} = (.0113004, -.0318686, .0686426, -.0587140, .0092500) .$$

Il vettore delle differenze in generale può fornire alcune indicazioni riguardo ai titoli sui quali è possibile alestire operazioni di arbitraggio. Si possono vendere titoli sovraprezzati (rispetto all'ipotesi che la vera struttura sia quella trovata..), cioè quelli per i quali è positiva la componente di Diff , mentre si possono acquistare quelli sottoprezzati.Va tuttavia tenuto presente che nel fare ciò non è opportuno utilizzare gli stessi titoli impiegati per costruire la struttura. Infati nella metodologia impiegata è implicito che vi siano differenze fra i prezzi stimati e quelli reali (la funzione obiettivo dipende appunto da qesti) e quindi la loro significatività in termini di arbitraggi è pressochè nulla.

6 STRIPS e Strumenti Finanziari a Rendimento Variabile.

Le tipologie di titoli che verranno ora trattate si differenziano da quelle sinora studiate o per il fatto che i pagamenti periodici sono variabili, o perchè la loro esistenza dipende da qualche operazione effettuata su altri titoli precedentemente emessi. Si tratta di strumenti introdotti sui mercati al fine di rendere questi ultimi più rispondenti alle differenti esigenze degli operatori, in una ideale tendenza alla completezza che va di pari passo con l'espansione delle contrattazioni e con il collegamento sempre più stretto fra i diversi settori dei mercati.

6.1 STRIPS.

Una categoria di titoli che negli anni più recenti va diffondendosi in tutti i mercati è quella dei cosidetti STRIPS. La loro nascita è collegata essenzialmente all'esigenza, manifestatasi quasi ovunque nei mercati mondiali, di poter disporre di titoli del tipo zcb con scadenze più estese di quelle di breve periodo che caratterizzano le emissioni del Tesoro.

Non è sorprendente che questi strumenti siano nati nel mercato dei bonds che vanta il primato mondiale sia per i volumi negoziati che per il numero dei diversi titoli presenti: quello degli Stati Uniti d'America. La prima comparsa di STRIPS è dovuta alla iniziativa di due fra le più grandi società mondiali di brockeraggio: la Merrill Lynch e la Solomon Brothers. Nel 1982 queste società costruirono degli zcb sintetici denominati dalla Merrill Lynch TIGRs (Tresaury Income Growth Receipts) e CATS (Certificates of Accrual on Tresaury Securities) dalla Solomon Brothers. La procedura seguita consisteva nell'acquistare intere emissioni di titoli con cedola di scadenza pluriennale emessi dal Tesoro Americano, depositandoli in una banca in un conto di custodia. Sucessivamente le due società emettevano dei nuovi titoli (titoli privi di cedola) di valore nominale pari all'ammontare di ciascuna cedola (quindi scadenti ad ogni data di pagamento delle cedole) e all'ammontare del capitale scadente alla data di estinzione del prestito. Questo procedimento di separare ogni futuro pagamento in conto cedola ed il capitale (chiamato "corpus") vendendo le singole componenti come specifiche emissioni viene definita coupon stripping. Il mercato per questi nuovi titoli, grazie alla fiducia che gli investitori riponevano nelle due società e alla garanzia rappresentata dal deposito dei titoli di Stato corrispondenti, si è rivelato assai liquido fin dagli esordi ed in breve altre banche di investimento crearono i loro propri certificati. Così, ad esempio, la Lehman Brothers emette i suoi TBR (Tresaury Bond Receipts) e compaiono anche GATORs, DOGS e altri strumenti che per gli acronomi dai quali erano connotati vennero genericamente denominati Animals.

Il passo successivo è la scesa in campo diretta del Tesoro Americano che nel 1985 annuncia il suo programma di Separate Trading of Registered Interest and Principal Securities (STRIPS). Il mercato di questi strumenti cresce rapidamente ed in breve sbarcano in Europa. Nel maggio del 1995 la Banca d'Inghilterra emette un programma per un mercato di STRIPS che ha visto la sua effettiva operatività alla fine del 1997. Nello stesso anno Spagna e Germania annunciano l'emissione di STRIPS.

Senza entrare nei dettagli tipo quali titoli del debito pubblico partecipano al programma (in Inghilterra, ad esempio, sette titoli sono suscettibili di stripping) o le date di rimborso, ci si sofferma brevemente sui benefici che gli investitori possono trarre da questi titoli, benefici che giustificano il rapido successo dello strumento.

Il vantaggio più evidente rispetto a titoli con cedola presentato dagli STRIPS è legato alla loro natura di zcb, vale a dire l'assenza di rischio di reinvestimento in caso di variazioni della struttura per scadenza dei rendimenti. Un ulteriore elemento di interesse è che in relazione a titoli con cedola della medesima scadenza gli STRIPS hanno sì maggiore duration e convexity, ma minore convexity rispetto a titoli con cedola di medesima duration (dunque di medesima rischiosità). Il trade-off fra questi benefici sta nel fatto che i movimenti nei rendimenti degli zcb è funzione non solo dellivello della curva dei rendimenti, ma anche della forma della curva stessa in periodi precedenti.Di conseguenza risulta complicato, se non impossibile,in periodi di variabilità dei rendimenti, effettuare delle coperture di posizioni di zcb tramite titoli con cedola.

Gli operatori che maggiormente sono attratti dagli STRIPS sono innanzitutto le compagnie di assicurazione e i fondi pensione.Infatti ambedue queste istituzioni devono far fronte ad impegni di lungo periodo con duration ben più lunghe delle scadenze usualmente offerte dalmercato degli zcb. Gli STRIPS sono dunque strumenti ideali per fronteggiare futuri cash-flows noti nel loro ammontare. Come elemento negativo va sottolineato che proprio a causa del loro essere dedicati ad uscite future lontane nel tempo, generano un vincolo di illiquidità in chi li detiene.

Anche per i gestori di portafogli la presenza degli STRIPS sul mercato costituisce un desiderato vantaggio in quanto rende più agevole rappresentarsila curva dei rendimenti (avendola praticamente sotto occhio non appena leggono un listino dei rendimenti degli STRIPS) e quindi prendere le necessarie decisioni per alterare la duration del portafoglio globale in maniera da mantenerlo immunizzato.

Anche investitori privati possono essere avvantaggiati dalla presenza di questi titoli: ogni qual volta si voglia costruire del risparmio finalizzato ad una spesa futura prevedibile sia nell'ammontare che nell'epoca (ad esempio negli Stati Uniti è abbastanza consueto che alla nascita di un figlio si costruisca una qualche forma di risparmio destinata a coprire le spese universitarie per quando lo stesso accederà al college).

6.2 Titoli a Cedola Variabile.

In ogni mercato obbligazionario sono presenti titoli a cedola variabile, titoli cioè che legano l'ammontare dei pagamenti periodici ad un qualche indice (ad esempio il tasso prevalente nel periodo o il rendimento di un qualche altro strumento del mercato). Nel mercato italiano questi titoli sono i Certificati di Credito del Tesoro (CCT), strumenti negoziati in quantità sufficienti per renderli titoli di buona liquidità.

Prima soffermarsi sulle modalità di valutazione dei titoli a cedola variabile è necessario introdurre due particolari tipi di bonds: i par- bonds ed i titoli a cedola implicita i quali, pur non essendo materialmente negoziatinei mercati, costituiscono un importante riferimento teorico per quanto segue.

I par bonds sono titoli che quotano alla pari, overo titoli il cui prezzo è uguale al valore di rimborso K. Evidentemente l'essere un par bond è una contingenza legata alle quotazioni di mercato e non una proprietà permanente del titolo stesso. La rilevanza di un par-bond è connessa al fatto che il suo tasso cedolare coincide con il TIR e dunque di un par bond è immediato rilevare il rendimento effettivo. Il tasso cedolare definisce il cosidetto par yield che può essere formalizzato nel modo seguente.

Definizione 12 Data la funzione di attualizzazione v (t, s), deducibile dalla struttura per scadenza dei prezi P (t, s) vigente all'istante t, ed un titolo che paga cedole costanti alle epoche t + 1, t + 2, ..., t + n e rimborso del capitale nominale K in t + m, si definisce par yield il tasso cedolare che rende il titolo un par bond.

Indicando con $\bar{C}$ la cedola che rende il titolo un par bond si ha dunque la condizione:

$$K = \bar{C} \sum_{j=1}^{n} v(t, t + j) + Kv(t, t + m) \tag{72}$$

e pertanto par yield $= \frac{\bar{C}}{K}$.

Si consideri ora un titolo che paga cedole calcolate in base ai tassi impliciti vigenti in un certo istante t e deducibili dalla struttura P (t, s) osservabile al medesimo istante.

Indicando con C_j la j-ma cedola è dunque: $C_j = Ki(t, t + j - 1, t + j)$. Un titolo di questo tipo è detto titolo a cedola implicita.

E' agevole provare che un titolo a cedola implicita, all'istante della sua emissione, è un par bond.

Infatti indicando con P_t il prezzo all'istante t, è:

$$P_t = K \sum_{j=1}^{n} i(t, t + j - 1, t + j)v(t, t + j) + Kv(t, t + n)$$

ovvero, ricordando che è

$$\begin{aligned} i(t, t + j - 1, t + j) &= [v(t, t + j - 1, t + j)]^{-1} - 1 = \\ &= \frac{v(t, t + j - 1)}{v(t, t + j)} - 1 = \\ &= \frac{v(t, t + j - 1) - v(t, t + j)}{v(t, t + j)} \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} P_t &= K \sum_{j=1}^{n} \frac{v(t, t + j - 1) - v(t, t + j)}{v(t, t + j)} v(t, t + j) + Kv(t, t + m) = \\ &= K \sum_{j=1}^{n} [v(t, t + j - 1) - v(t, t + j)] + Kv(t, t + m) = \\ &= K [1 - v(t, t + m)] - Kv(t, t + m) = K. \end{aligned}$$

E' bene ricordare che la proprietà di essere un par bond, per un titolo a cedola implicita, vale solo all'istante iniziale poichè successivamente la struttura tramite la quale si attualizza non è più la stessa in base alla quale sono determinate le cedole.

Fra i titoli a cedola variabile, la cui cedola ha un ammontare che risulta ancoorato ad un qualche indice di rendimento del mercato, quelli a perfetta indicizzazione si caratterizzano per il fatto che il parametro di riferimento è costituito proprio dai tassi periodali che saranno praticati sul mercato nei tempi futuri di computo delle cedole. Così indicando con $i(t + k, t + k + 1)$ il tasso di mercatoal tempo $t+k-1$ per impieghi di durata pari alla periodicità della cedola, quella di competenza del $(k+1)$-mo periodo ha valore $C_k = Ki(t + k, t + k + 1)$.

E' evidente che non è possibile valutare un titolo a perfetta indicizzazione attualizzando il flusso futuro a cui dà diritto, in quanto sono ignoti i tassi futuri in base ai quali vengono determinati i flussi cedolari. Gli operatori del mercato, nelle loro valutazioni, hanno consolidato la prassi di utilizzare i tassi forward, implicitamente definiti dalla struttura corrente, in luogo dei tassi spot futuri. Con ciò essi assumono che i tassi forward siano una buona previsione di quelli futuri. Grazie a questa tecnica, un titolo a perfetta indicizzazione diviene una particolare fattispecie di par bond. L'approssimazione dei tassi futuri per mezzo di quelli impliciti attuali, a prima vista si presenta come una approssimazione deterministica di un contesto che di per sè sarebbe aleatorio. Tuttavia questo modo di agire è teoricamente motivato e, come si vedrà subito, conduce ad una corretta valutazione del titolo in questione.

Si inizi con il determinare il valore all'istante iniziale t del solo fluso costituito dalle cedole variabili. A tal fine si consideri il generico pagamento che verrà effettuato al tempo $t + k$, $C_k = Ki(t + k - 1, t + k)$.

L'operazione non viene alterata se ad ogni istante $t + k$ si aggiunge e si toglie l'importo K. In tal modo il flusso complessivo dovuto alle cedole può essere scisso in due flussi di segno opposto, quello contenente l'importo K con il segnopositivo, e quello costituito dai soli importi negativi, tutti uguali a $-K$.
Si ha dunque:

$$\{0, K + Ki(t, t + 1), ..., K + Ki(t + n - 1, t + m)\} / \{t, t + 1, ..., t + m\} \tag{73}$$

e

$$\{0, -K, ..., -K\} / \{t, t + 1, t + 2, ..., t + m\} . \tag{74}$$

Consideriamo ora il primo dei due flussi.

Ciascun elemento ha la forma $K [1 + i(t + k - 1, t + k)]$ ed è pertanto il montante dell'importo K investito in $t + k - 1$ alle condizioni di tasso del mercato in quel momento.

Dal punto di vista della equivalenza finanziaria è così indifferente sostituire all'importo $K [1 + i(t + k - 1, t + k)]$, esigibile in $t + k$, il suo valore scontato K esigibile un periodo prima, cioè in $t + k - 1$. Tenedo conto di ciò è possibile trasformare il flusso $\{0, K + Ki(t, t + 1), ..., K + Ki(t + m - 1, t + m)\}$ nel seguente:

$$\{K, K, ..., 0\} / \{t, t + 1, t + 2, ..., t + m\} . \tag{75}$$

Combinando ora i due flussi (74) e (75) si ottiene la seguente sequenza di importi equivalente a quella generata dal flusso delle cedole variabili:

$$\{K, 0, ..., 0, -K\} / \{t, t + 1, t + 2, ..., t + m - 1, t + m\} .$$

Il valore di questo flusso sarà dunque: $K - Kv(t, t + m)$.

Tenendo ora conto anche del rimborso di K in $t + m$ aggiungendo il suo valore scontato a $K [1 - v(t, t + m)]$, si ha infine:

$$P_t = K - Kv(t, t + m) + Kv(t, t + m) = K. \qquad (76)$$

Dunque un titolo ad indicizzazione perfetta è proprio un par bond e per via analitica si conferma la buona intuizione degli operatori usi ad utilizzare i tassi forward nel determinare l'entità delle cedole.

Si tenga presente che il risultato al quale si è pervenuti presuppone che la valutazione del titolo a perfetta indicizzazione venga effettuata al momento della emissione o all'epoca di scadenza delle cedole. Al di fuori di questi istanti il titolo cessa di essere un par bond poichè la struttura che si deve usare nella attualizzazione non è più quella in base alla quale i tassi forward sono stati determinati.

Non è tuttavia complicato valutare un titolo indicizzato in un istante τ compreso fra due successive scadenze cedolari $t + k - 1$ e $t + k$. Basta infatti attualizzare il valore $C_k = Ki(t+k -1, t+k)$ della cedola in corso (e quindi nota in τ) per il periodo $[\tau , t + k]$ in base alla struttura vigente in τ e poi, sfruttando il fatto che al tempo $t + k$ il titolo avrà ancora valore K, scontare sullo stesso orizzonte temporale l'impoto K. Avremo quindi:

$$\begin{aligned} P_\tau &= Kv(\tau, t + k) + C_k v(\tau , t + k) = \\ &= Kv (\tau , t + k) [1 + i (t + k - 1, t + k)] \end{aligned} \qquad (77)$$

Dalla (77), ricordando che $1 + i (t + k - 1.t + k) = \frac{1}{v(t+k-1,t+k)}$, si ottiene

$$P_\tau = K \frac{v (\tau , t + k)}{v (t + k - 1, t + k)} \qquad (78)$$

e poichè è $t + k - 1 < \tau$, se fra $t + k - 1$ e τ non sono intervenute variazioni nella struttura per scadenza, è anche $\frac{v(\tau,t+k)}{v(t+k-1,t+k)} > 1$ e dunque $P_\tau > K$. Dunque in assenza di shocks nella struttura, negli istanti intermedi a due successivi pagamenti di cedola, il titolo a perfetta indicizzazione quota sopra la pari per l'effetto del rateo che cresce con il trascorrere del tempo. Un istante prima che il titolo vada ex-cedola, il suo valore è

$$\begin{aligned} P_{(t+k)^-} &= \lim_{\tau\to(t+k)^-} P_\tau = \lim_{\tau\to(t+k)^-} K \frac{v (\tau , t + k)}{v (t + k - 1, t + k)} = \\ &= \frac{K}{v (t + k - 1, t + k)} = K + K\, i (t + k - 1, t + k) \end{aligned}$$

mentre un istante dopo il pagamento della cedola si ha: $P_{(t+k)^+} = K$ con discontinuità di ampiezza pari all'ammontare della cedola in corrispondenza a $t + k$.

Se fra $t + k - 1$ e $t + k$ si producono variazioni nella struttura per scadenza, allora può accadere che sia $\frac{v(\tau,t+k)}{v(t+k-1,t+k)} < 1$ e pertanto il titolo quota sotto la pari. L'andamento di P_τ presenterà un andamento con tante discontinuità quanti sono gli istanti nei quali si rilevano variazioni (significative) della struttura per scadenza dei prezzi e fra due successivi punti di discontinuità si potrà avere un andamento tanto crescente quanto decrescente, in dipendenza del tipo di variazione. In ogni caso deve essere poi $P_{(t+k)^+} = K$.

Riassumendo quanto sin qui esposto relativamente alla quotazione di titoli a perfetta indicizzazione, i prezzi di mercato coincidono con il valore di rimborso a tutte le scadenze cedolari ed all'emissione, mentre da queste se ne discostano leggermente, in base alla (78), negli istanti intermedi. La peculiare evoluzione della quotazione che tende periodicamente a riportarsi sul valore nominale conferisce a questa tipologia di titoli una prorietà molto apprezzata che si può definire di autoimmunizzazione. Di fatto un tale titolo risente in maniera assai limitata, e solo al di fuori delle epoche di stacco delle cedole, di eventuali variazioni del mercato per quanto concerne i rendimenti.

Quanto sin qui esposto a proposito della valutazione di titoli a perfetta indicizzazione si fonda su due ben precise ipotesi. La prima è che vi sia coincidenza tra l'istante di rilevazione del parametro che determina l'indicizzazione e l'istante di godimento della cedola. In altre parole l'indice deve essere rilevato nell'istante di inizio del godimento della cedola. Se l'indice è un tasso del tipo $i(t, s)$, l'istante t deve essere anche quello di stacco della cedola. La seconda ipotesi è che la durata alla quale si riferisce l'indice (il tasso) coincida con il periodo su cui la cedola è calcolata (ovvero s deve essere l'istante di godimento della cedola futura). In pratica queste coincidenze non si verificano, sia perchè il parametro di indicizzazione viene definito ad epoche fisse che non tengono conto delle specifiche scadenze di ciascuna emissione, sia perchè anche il periodo di validità del parametro non coincide in genere con gli intervalli di maturazione delle cedole. Di fatto le quotazioni reali dedotte dal mercato possono discostarsi dalla parità anche in prossimità dei periodi di scadenza delle cedole.

Titoli a perfetta indicizzazione sono più un riferimento teorico che uno strumento effettivamente negoziato sul mercato. Per quanto concerne i mercati reali, quello italiano ad esempio, la tipologia più prossima è rappresentata dai CCT i quali sono titoli ad indicizzazione parziale in quanto la cedola si compone di due parti: una legata all'indice e l'altra fissa detta spread. La presenza di questa componente è motivata dal fatto che i titoli indicizzati, mentre da un lato sono titoli autoimmunizzanti in quanto si comportano, entro certi limiti, come una successione dinvestimenti di breve periodo, sotto altri aspetti si diversificano da investimenti sul mercato monetario. Ciò che li assimila ad investimenti di breve periodo è l'aggiornamento della cedola in base all'indicatore di mercato. Tale meccanismo garantisce una redditività che si allinea alle mutate condizioni del mercato ogni qual volta queste si manifestino. Però il titolo indicizzato, a differenza di una strategia di roll-over di investimenti sul di mercato monetario, non consente un rapido spostamento, dal mercato a breve a quello a lungo se, ad esempio, si verificasse un cambiamento nei rendimenti che lo rendesse vantaggioso. Con i titoli a lunga scadenza indicizzati, lo smobilizzo è sempre più rischioso ed è per questa rigidità che l'investitore in CCT richiede un plus di rendimento rappresentato dallo spread.

7 I Contratti SWAP.

La essenza di un contratto SWAP cosnsiste nello scambio periodico, fra due soggetti, di importi monetari. La fattispecie più semplice che si può configurare è quella in cui i due soggetti, A e B, ambedue mutuatari per il medesimo importo K, ammortizzano il proprio debito con modalità diverse: A paga interessi periodici calcolati in base al tasso fisso e B in base ad un tasso variabile agganciato ad un qualche indice (inflazione, rendimenti del mercato ecc.) Se le parti desiderano mutare le reciproche posizioni, così che A intende pagare in base ad un tasso fisso e B variabile, possono semplicemente accordarsi per scambiare i pagamenti, senza risolvere i contratti originari. A pagherà a B gli interessi in base al tasso variabile, che B a sua volta verserà al proprio creditore, mentre B versa ad A gli interessi calcolati in base al tasso fisso che questi trasferirà al proprio creditore. Sui flussi di pagamenti che intercorrono fra i due soggetti ed i rispettivi istituti creditizi si innestano così i due flussi fra i soggetti stessi. In maniera analoga si può procedere se i soggetti sono investitori, uno con posizione long su di un titolo a cedola fissa e l'altro con posizione long su di un titolo a cedola variabile. Se essi concordano nel mutare la natura dei propri investimenti così che chi ha una posizione sul reddito fisso intende passare a quello variabile e viceversa, anzichè vendere i rispettivi titoli sul mercato, riacquistando poi quello di differente natura, possono porre in essere un contratto SWAP in base al quale scambiarsi il flusso delle cedole. In tal modo si ottiene l'effetto di mutare la natura dell'investimento. E' importante sottolineare che nei contratti in esame ciò che forma oggetto di scambio sono i pagamenti periodici (interessi o cedole) e non il capitale. Quest'ultimo, detto nozionale, funge da riferimento nel contratto senza entrare effettivamente nello scambio.

La figura seguente illustra i flussi collegati ad un contratto SWAP nel caso in cui le parti scambino i corrispettivi obblighi inerenti il pagamento degli interessi all'interno di contratti di mutuo.

I due esempi riportati fanno riferimento ai tassi di interesse quale fondamento essenziale del contratto. Tuttavia esistono contratti SWAP la cui grandezza di riferimento è un tasso di cambio fra due divise di differenti paesi. Così, ad esempio, se due importatori, uno italiano e l'altro giapponese, si riforniscono periodicamente di materie rivolgendosi al mercato dell'altro (l'italiano acquista componenti elettroniche in Giappone e il giapponese tessuti in Italia), i pagamenti che uno dovrà fare in Giappone utilizzando yen, e l'altro in Italia in euro, possono essere scambiati eliminando in tal modo il rischio derivante dalle oscillazioni del cambio. Scambiandosi i flussi l'importatore italiano pagherà in lire le forniture dell'importatore giapponese, mentre il giapponese paga in yen gli acquisti fatti dall'italiano. Questa tipologia di contratto viene denominato SWAP su valute, mentre quello esemplificato più sopra è detto SWAP su tassi (IRS: Interest Rate Swap). In quanto segue verranno analizzati esclusivamente i contratti SWAP su tassi di interesse.

Dagli inizi degli anni ottanta del secolo passato, quando i primi IRS hanno fatto la loro comparsa come nuovo strumento nei mercati finanziari, la loro espansione è stata inarrestabile ed attualmente rappresentano lo strumento i cui volumi di contrattazione superano di gran lunga quelli di qualsiasi altro prodotto della ingegneria finanziaria.

Prima di procedere all'analisi dettagliata del contratto, dedicando particolare attenzione ai problemi di valutazione ad esso connessi,se ne delineano alcuni aspetti economico-tecnici dai quali dipende l'organizzazione dei mercati nei quali vengono negoziati.

Come dovrebbe essere già chiaro dalle premesse un IRS esiste in quanto, pur senza che vi sia scambio del capitale (il cosidetto nozionale), esistono contratti che si incentrano sui tassi di interesse. Ciò dà all' IRS il carattere di strumento derivato, di strumento cioè che opera su altri strumenti finanziari di diversa natura (i mutui o i bonds). Inoltre esso alla sua nascita non dà luogo a prestazione alcuna (in analogia con i contratti forward) e per questa caratteristica è da considerarsi uno strumento fuori bilancio.

Per quanto riguarda i tassi che entrano nel contratto, uno è un tasso fisso (fixed rate) sulla base del quale vengono computati gli elementi del flusso a carico di una delle parti. La prestazione periodica che ne deriva viene calcolata moltiplicando il nozionale per il tasso in questione. Il flusso complessivo che ne deriva costituisce la gamba fissa dell'IRS. L'altro tasso che entra in gioco nel contratto è il tasso variabile (floating rate). Il tasso variabile viene rilevato all'inizio del periodo e moltiplicandolo per il nozionale si ottiene l'elemento del flusso da corrispondere al periodo successivo. Il flusso generato dal tasso variabile costituisce la gamba variabile dell'IRS. La periodicità dei pagamenti è generalmente semestrale (come la cadenza delle rate dei mutui o delle cedole dei titoli), ma possono essere messi in atto contratti nei quali la gamba variabile è articolata su scadenze semestrali mentre la gamba fissa segue altre cadenze.

Nella tabella seguente si riportano la gamba fissa e quella variabile di un contratto di durata tre anni stipulato il 4.5.2001. Il tasso fisso è al livello del 4% semestrale mentre il primo tasso variabile applicato (rilevato alla stipula del contratto) è del 3.5% semestrale. Il nozionale è fatto pari a 1000 ed il primo scambio di importi avviene il 4.11.2001.

EPOCA	Gamba Fissa	Gamba Variabile
04.05.2001		tasso sem. = 0.035
04.11.2001	1000 (0.04) = 40	−1000 (0.035) = −35
04.05.2002	1000 (0.04) = 40	−1000 i (1, 2)
04.11.2002	1000 (0.04) = 40	−1000 i (2, 3)
04.05.2003	1000 (0.04) = 40	−1000 i (3, 4)
04.11.2003	1000 (0.04) = 40	−1000 i (4, 5)
04.05.2004	1000 (0.04) = 40	−1000 i (5, 6)

TABELLA 6

Il tasso variabile viene usualmente determinato come la somma di un tasso ufficiale di riferimento incrementato di una percentuale che riflette il rating della parte alla quale il tasso si applica. Le società che accedono al mercato dei capitali vengono classificate in base alla loro solvibilità, di modo che a società considerate più solide vengano praticate condizioni di tasso più favorevoli in virtù del minore rischio di insolvenza che le connota. Il tasso ufficiale di riferimento è, nella grande maggioranza dei contratti, il LIBOR (London InterBank Official Rate) a sei mesi, rilevato sulla piazza di Londra. I tassi LIBOR si articolano come una serie di strutture per scadenza dei tassi, articolate sullo scadenziario una, due settimane, un mese, due mesi, e cosi via mensilmente fino a dodici, una per ciascuna delle principali valute del mercato (euro, dollaro statunitense, yen, sterlina, dollaro canadese, dollaro australiano, franco svizzero). Questi tassi, applicati agli scambi di capitali fra organismi bancari vengono rilevati ufficialmente e riportati quotidianamente nei listini.

Altri tassi variabili che possono fungere da riferimento sono l'EURIBOR, o il RIBOR, utilizzato quest'ultimo per alcune tipologie di IRS (quelli definiti come domestici) del mercato italiano.

Le modalità in base alle quali gli SWAPS possono essere posti in essere sono numerose (ad esempio gli importi relativi ad una delle due gambe possono essere liquidati tutti all'epoca finale, opportunamente capitalizzati) sì da rendere il contratto sufficientemente flessibile alle specifiche esigenze dei singoli operatori. In ciò sta anche il successo che ha immediatamente arriso al nuovo strumento. Chi fosse interessato ad approfondire le tematiche di carattere tecnico o giuridico degli SWAPS trova una ampia letteratura, la cui abbondanza sottolinea ancora una volta l'enorme grado di penetrazione nei mercati di questo giovane strumento, e quale sia il suo apprezzamento da parte degli operatori istituzionali.

In quanto segue ci si limiterà ad affrontare le tematiche che si collegano alla convenienza di ciascuna parte del contratto ad accedervi (analisi dei vantaggi comparati) ed alla loro valutazione.

7.1 Il Fondamento Economico del Contratto SWAP.

Fino dal suo primo apparire sul mercato (Deutsche Bank, 1982) il contratto l'IRS ha attratto l'attenzione dei teorici dell'economia, i quali hanno immediatamente tentato di giustificarne la messa in essere e la diffusione in base agli assunti fondamentali della teoria della utilità. Il dibattito teorico che ne è seguito ha chiarito alcuni aspetti della intrinseca natura dello strumento, lasciando al contempo alcune zone d'ombra relativamente alla relazione fra i contratti in questione e l'equilibrio del mercato, visto dal versante della assenza di opportunità di arbitraggio.

La prima questione che ci si pone analizzando la teoria del contratto SWAP è quella relativa alla ragione per la quale le parti sono interessate a porlo in essere. La risposta è stata data in termini di vantaggi comparati che il contratto consente di ottenere ad ambedue i contraenti. Alla base di questi vantaggi si troverebbe una certa inefficienza del mercato dei capitali, inefficienza che si manifesterebbe nella relazione fra le diverse condizioni di tasso alle quali lo stesso soggetto (in dipendenza del proprio rating) è assoggettato. In sintesi, una società che accede al mercato dei capitali trova condizioni di tasso differenti a seconda che intenda ottenere un finanziamento a tasso fisso o a tasso variabile. Dalal prospettiva del mutuante, concedere un prestito ad un tasso fisso significa vincolarsi a condizioni che resteranno operative per tutta la durata della operazione, indipendentemente dalle modifiche che la solvibilità del mutuatario può subire nel tempo (insorgenza di elevate perdite, dilatarsi della situazione debitoria in seguito a costosi progetti posti in essere, ecc.). Un contratto a tasso variabile consente per contro di adeguare alle mutevoli condizioni del mercato (ma indirettamente anche a quelle della società) i termini della remunerazione dello stesso. Tenedo conto di queste considerazioni, un operatore che entra nel mercato dei capitali trova condizioni diverse nei due settori del fisso e del variabile, ed è possibile che confrontandosi con un altro operatore (con diverso rating rispetto al proprio) emergano opportunità vantaggiose per entrambi.

L'esempio seguente illustra la situazione.

Esempio 13 Due società A e B, di diverso rating, possono accedere al mercato del credito alle condizioni seguenti. Per quanto concerne A, di rating migliore rispetto a B, può finanziarsi con tasso fisso al 10% o con tasso variabile pari al LIBOR + 0.25%. B ottiene un tasso fisso del 12% ed uno variabile pari a LIBOR + 0.75%. Nella matrice seguente, ove gli elementi della prima colonna fanno riferimento alle condizioni per A e quelli della seconda per B, sintetizza il contesto fronteggiato dalle due società:

	A	B
Fisso	10%	12%
Variab.	LIBOR + 0.25%	LIBOR + 0.75%

TABELLA 7

Come si vede, essendo B classificata con un peggiore rating, ottiene condizioni più onerose di A in ambedue i segmenti del mercato. Tuttavia la situazione è peggiore nel caso del fisso che presenta una differenza $D_{fisso} = 12\% - 10\% = 2\%$ superiore a $D_{var} = LIBOR + 0.25\% - (LIBOR + 0.75\%) = 0.50\%$ riscontrabile nel variabile. Se la società B è interessata al finanziamento al tasso fisso, mentre A intende finanziarsi al tasso variabile, allora il differenziale $D_{fisso} - D_{var} = 1.5\%$ può essere spartito fra le due società sotto forma di minore tasso di finanziamento effettivo ottenibile, ponendo in essere un contratto SWAP. Si noti che la condizione necessaria affinchè vi sia convenienza nel ricorrere al contratto è che sia maggiore la differenza fra i tassi nella modalità fissa (quella richiesta dal contraente con condizioni globali peggiori) rispetto a quella variabile, come accde in quanto sin qui esemplificato. Si ponga dunque che A si indebiti al fisso al tasso del 10%, mentre B lo faccia al tasso variabile LIBOR + 0.75%. Nel contratto IRS, B pagherà ad A un tasso fisso: 10% + α, mentre riceverà dalla controparte il tasso variabile LIBOR + β. Il costo effettivo per B sarà quindi:

$$\begin{aligned} Costo\_Eff_B &= LIBOR + 0.75 + 10 + \alpha - (LIBOR + \beta) = \\ &= \alpha - \beta + 10.75 \end{aligned}$$

mentre per A è:

$$Costo\_Eff_A = LIBOR + \beta + 10 - (10 + \alpha) = LIBOR + \beta - \alpha.$$

I valori per α e β devono essere tali per cui, in presenza del contratto, il costo effettivo sia minore, per ciascuno dei contraenti, rispetto a quello che sosterrebbero in sua assenza. Quindi deve essere: $Costo\_Eff_A < LIBOR + 0.25$ e $Costo\_Eff_B < 12$, quindi:

$$\begin{aligned} LIBOR + \beta - \alpha &< LIBOR + 0.25 \\ \alpha - \beta + 10.75 &< 12 \end{aligned}$$

ed in definitiva si ottengono i vincoli:

$$0.25 < \alpha - \beta < 1.25$$

ai quali vanno aggiunti $\alpha < 2$ e $\beta < 0.75$ in quanto nè A nè B possono diventare finanziatori della controparte. I guadagni G_A, G_B che le due società realizzano con l' IRS sono pertanto:

$$\begin{aligned} G_A &= LIBOR + 0.25 - (LIBOR + \beta - \alpha) = 0.25 + \alpha - \beta \\ G_B &= 12 - (\alpha - \beta + 10.75) = 1.25 - \alpha + \beta. \end{aligned}$$

Poichè il guadagno complessivo è $D_{fisso} - D_{var} = 1.5\%$, le due società potranno fisare la quota di questo che spetta all'una, individuando in tal modo i valori α e β. Indicando con k la quota di A e con 1 − k quella di B risolvendo l'equazione $G_A = 1.5k$ (ovvero la $1.25 - \alpha + \beta = 1.5(1 - k)$) si ottiene:

$$\alpha = -0.25 + \beta + 1.5k.$$

Ponendo che sia k = 0.6 è:

$$\alpha = 0.65 + \beta$$

relazione che lega i due parametri, tenuto conto dei vincoli che questi devono soddisfare.

Si è dunque visto che il fondamento economico che giustifica il ricorso al contratto IRS viene individuato nel principio del vantaggio comparato. Come già accennato il vantaggio comparato opera in presenza di un certo livello di inefficienza del mercato che non sarebbe in grado di assegnare correttamente i differenziali di tasso in relazione ai diversi ratings degli operatori. Su questo aspetto non tutta la teoria concorda poichè, considerato l'elevato volume delle attuali contrattazioni ed il ventennio di vita raggiunto dal contratto, il mercato stesso dovrebbe avere provveduto ad eliminare le opportunità di arbitraggio che si traducono nel vantaggio comparato. Bisogna però tenere presente che la menzionata teoria intende semplicemente dare base economica al fatto che due soggetti, ambedue interessati a finanziarsi con una operazione di mutuo e con opposte preferenze rispetto alle modalità, pongono in essere un contratto SWAP se i loro ratings differiscono secondo una definita proporzione. L'uso che viene fatto del contratto nelle sofisticate operazioni di ingegneria finanziaria finalizzate a sterilizzare il rischio di tasso, presuppongono una ben più complessa analisi che metta in gioco altri elementi che non siano i differenziali e le preferenze delle parti. Si tenga presente che nella generalità dei casi gli operatori pongono in essere IRS in combinazione con altre operazioni su titoli, sia per coprire specifiche posizioni, che per avere l'opportunità di sfruttare eventuali arbitraggi che si dovessero manifestare nel mercato. E' chiaro quindi che un sistema complesso di transazioni come quello in questione non può trovare fondamento economico nella analisi di un singolo contratto, isolato dagli altri con i quali entra in combinazione. La teoria fondata sui vantaggi comparati, in conclusione, è una corretta chiave interpretativa del contratto se ci si limita a considerarlo come un accordo che comporta scambi di flussi fra soggetti inseriti in un contesto di finanziamento aziendale.

7.2 Pricing e Valutazione di Contratti IRS.

I contratti IRS dei quali si tratta nel presente paragrafo sono quelli più semplici, noti anche come plain vanilla SWAPS, che prevedono scambi fra interessi calcolati in base ad un tasso fisso e interessi calcolati in base ad un tasso variabile.

Definizione 14 In un contratto IRS di tipo fixed-floating SWAP (generic SWAP) due parti si accordano per scambiarsi periodicamente importi dovuti a interessi, calcolati sul medesimo capitale (nozionale). Una parte paga all'altra interessi calcolati in base ad un tasso fisso, detto tasso SWAP (SWAP rate), mentre l'altra paga gli interessi calcolati in base ad un tasso variabile (floating interest rate) espresso come somma di un indice (LIBOR a sei mesi, RIBOR a tre mesi ecc.) più una quota fissa, eventualmente nulla.

Per quanto riguarda i dettagli tecnici del contratto si ricorda che alle date di scadenza (qualora queste coincidano per le due controparti) è solo la parte con l'importo più elevato da pagare ad effettuare la transazione per la differenza. Le modalità di calcolo degli interessi possono variare a seconda delle piazze ove i contratti vengono stipulati o delle valute in base alle quali si opera. Le differenze riguardano essenzialmente le leggi di capitalizzazione impiegate (semplice o dello sconto commerciale) e la modalità di computo dei giorni (su base 360 o 365). Nella grande maggioranza dei contratti la legge applicata è quella della capitalizzazione semplice e la modalità di computo dei giorni è quella a base 360 per la gamba fissa e a base 365 per la variabile. E' anche possibile che le epoche di pagamento degli importi non coincidano, così come si possono porre in essere contratti con nozionale che varia di periodo in periodo.

L'operazione valutativa da effettuare alla nascita del contratto è il pricing dello stesso, ovvero la determinazione del tasso fisso (tasso SWAP) che l'acquirente dell'IRS è disposto a pagare. La terminologia corrente per questi contratti identifica l'acquirente come la parte che paga il tasso fisso per ricevere il variabile. Come si vedrà subito la regola in base alla quale si procede al pricing è ancora quella della esclusione delle opportunità di arbitraggio, regola che si traduce nel porre uguale a zero il valore attuale dell'insieme delle prestazioni che scaturiscono dal contratto, dato che alla nascita nessuna delle parti è tenuta ad alcuna prestazione.

Diversa dal pricing è l'operazione di valutazione di un IRS, operazione la cui necessità può manifestarsi nel corso della vita del contratto. L'esigenza di valutare SWAPS nel corso della loro vita nasce ogni qual volta una delle parti nel contratto decide di uscirne. L'uscita dal contratto può avvenire per mezzo di un operazione di reversing tramite la quale la parte che intende interrompere il rapporto stipula un contratto di segno opposto in maniera da compensare gli effetti del precedente. Poichè le nuove condizioni del mercato non saranno in generale identiche a quelle del contratto già in opera, e poichè alla nascita il nuovo contratto non comporta obbligazioni, è necessario valutare il contratto precedente per stabilire l'ammontare che spetta a una delle due parti a titolo di compensazione. Altra modalità di interruzione è la cosidetto unwinding. Qui una parte liquida l'altra calcolando il valore dell IRS al momento dello scioglimento e liquidando la controparte. Può aversi infine una reassigning se la parte uscente fa subentrare un terzo nella sua posizione contrattuale. Anche in tale eventualità è richiesta la valutazione del contratto per stabilre eventuali importi compensatori.

7.2.1 La Determinazione del Tasso SWAP di Equilibrio.

Il pricing di un IRS, come già deto riguarda la determinazione del tasso SWAP che l'intermediario finanziario deve quotare giornalmente fissando a quale tasso è disposto ad acquistare lo SWAP (tasso fisso che è disposto a pagare) ovvero quello al quale è disposto a vendere lo stesso (tasso fisso che intende ricevere). Denaro e lettera son le denominazioni date allle due quotazioni. Nella analisi che segue verrà determinato un unico tasso di equilibrio, quello che funge da base per la fissazione delle quotazioni denaro e lettera.

Con riferimento ad un contratto da stipularsi all'istante t e di durata n periodi si indichi con $s(t, n)$ il tasso SWAP. E' noto che questo corrisponde alla parte fissa del contratto (chiamata gamba fissa).

Poichè nel momento in cui il contratto nasce nessuna prestazione deve essere effettuata dalle parti, il valore del medesimo, all'istante iniziale, deve essere nullo. Indicando con V_t^S il valore dello SWAP all'istante iniziale t, con V_t^F e V_t^V rispettivamente il valore, sempre in t, della gamba fissa e di quella variabile, ponendoci nella posizione di chi riceve il fisso, la condizione iniziale prende la forma:

$$V_t^S = V_t^F - V_t^V = 0 \tag{79}$$

Per individuare s(t, n) nelle consuete ipotesi di non arbitraggio, è utile assimilare il contratto SWAP ad una posizione long su di un titolo a cedola fissa ed una short su di un titolo a cedola variabile. Infatti aggiungendo ad ambedue le gambe il nozionale K, la struttura finanziaria del contratto non muta e ciò che si ottiene sono proprio i flussi relativi ai due titoli. Riprendendo ad esempio la tabella 6, questa può essere trasformata, senza che ciò comporti alcun effetto finanziario, nella seguente:

EPOCA	Gamba Fissa	Gamba Variabile
04.05.2001		tasso sem. = 0.035
04.11.2001	1000 (0.04) = 40	−1000 (0.035) = −35
04.05.2002	1000 (0.04) = 40	−1000 i (1, 2)
04.11.2002	1000 (0.04) = 40	−1000 i (2, 3)
04.05.2003	1000 (0.04) = 40	−1000 i (3, 4)
04.11.2003	1000 (0.04) = 40	−1000 i (4, 5)
04.05.2004	1000 (0.04) + 1000 = 1040	−1000 − 1000 i (5, 6)

TABELLA 8

Si indichi ora con B_t^F il valore del fittizio titolo a cedola fissa e con B_t^V il valore, sempre in t, del fittizio titolo ancorato al tasso LIBOR, dalla (79) si ha:

$$V_t^S = B_t^F - B_t^V = 0 \tag{80}$$

Le due componenti del valore del contratto, se si assume nota la struttura per scadenza con la quale effettuare le attualizzazioni, sono facilmente determinabili in quanto B_t^F non è altro che il valore in t di un titolo che paga cedole costanti pari a Ks(t, n). Quindi:

$$B_t^F = Ks(t, n) \sum_{j=1}^{n} v(t, t + j) + Kv(t, t + n)$$

mentre è: $B_t^V = K$, poichè come è stato mostrato nel paragrafo precedente, in t il titolo indicizzato LIBOR è un par-bond.

In definitiva è:

$$\begin{aligned} V_t^S &= Ks(t, n) \sum_{j=1}^{n} v(t, t + j) + Kv(t, t + n) - K = \qquad (81) \\ &= K \left[s(t, n) \sum_{j=1}^{n} v(t, t + j) + v(t, t + n) - 1 \right] . \end{aligned}$$

E ricordando che all'istante t di stipula del contratto nessuna delle due parti effettua alcun pagamento, per la condizione di assenza di arbitraggi deve essere $V_t^S = 0$.

Dalla (81) si ricava, ponendo $V_t^S = 0$,

$$s(t, n) = \frac{1 - v(t, t + n)}{\sum_{j=1}^{n} v(t, t + j)}. \tag{82}$$

Osservazione 15 Dovendo essre $V_t^S = 0$, segue che è $B_t^F = B_t^V$. E poichè, data la natura di par-bond del titolo a cedola variabile, è $B_t^V = K$, deve essere anche $B_t^F = K$. In altri termini anche il titolo costruito sulla gamba fissa dello SWAP deve essere un par-bond. Il suo tasso cedolare di equilibrio s(t, n) è quindi un TIR.

Riepilogando, se si dispone di una struttura per scadenza iniziale v(t, t + k), è agevole,per ogni contratto che nasce in t definire, per ogni n, l'ammontare s(t, n) che rappresenta il tasso SWAP del contratto.

Osservazione 16 Tornando alla (82), questa mostra che si può interpretare il tasso SWAP di equilibrio come il rapporto fra il valore di due portafogli di zcb: un portafoglio contenente un titolo long scadente immediatamente ed un titolo short che scade in t+n, mentre l'altro portafoglio contiene una serie di zcb che coprono tutte le scadenze intermedie, in posizione long. Di conseguenza un modello della struttura per scadenza dei rendimenti capace di prezzare esattamente gli zcb (in grado cioè di fornire i valori v(t, t+k)) è in grado anche di fornire i tassi SWAP di equilibrio.

In un modello di equilibrio del mercato dunque i prezzi degli zcb, ovvero la struttura implicita nei prezzi dei titoli con cedola, è legata ai tassi SWAP da una precisa relazione che consente di esprimere gli uni in funzione degli altri. Nella pratica, data la grande liquidità raggiunta dai mercati SWAP, e data quindi l'aderenza all'equilibrio dei tassi SWAP quotati dagli intermediari finanziari, la sequenza di questi s(t, 2), s(t, 3), ..., s(t, m) viene spesso assunta come l'insieme dei dati dai quali muovere per ottenere la struttura pre scadenza degli zcb, cioè i fattori di attualizzazione del mercato. Tenuto conto che essi hanno carattere di TIR riferiti a ipotetici titoli con cedola fissa quotati alla pari, e poichè per loro stessa natura i contratti SWAP hanno tutti scadenze intere con cedole pagate semestralmente, ci si trova nelle condizioni di regolarità delle scadenze richiesta per l'applicazione di una procedura iterativa che ricalca il metodo del bootstrapping.

Ponendo n = 1 nella (82) si ha:

$$s(t, 1) = \frac{1 - v(t, t + 1)}{v(t, t + 1)}$$

da cui

$$v\,(t, t + 1) = \frac{1}{1 + s\,(t, 1)}$$

e successivamente, ponendo n = 2:

$$s(t, 2) = \frac{1 - v(t, t+2)}{v(t, t+1) + v(t, t+2)}$$

e quindi

$$v(t, t+2) = \frac{1 - s(t, 2)\, v(t, t+1)}{1 + s(t, 2)}.$$

In generale, individuati i primi k−1 fattori di sconto $v(t, t+1), ..., v(t, t+k-1)$, il successivo è dato dalla relazione:

$$v(t, t+k) = \frac{1 - s(t, k) \sum_{j=1}^{k-1} v(t, t+j)}{1 + s(t, k)}. \qquad (83)$$

E' facile riconoscere nella (83) il risultato della applicazione del metodo del bootstrapping precedentemente studiato. Infatti è stato evidenziato nella osservazione 15 che il fittizio titolo con cedola al quale è possibile ricondurre la gamba fissa dell'IRS è un par bond e quindi, in condizioni di equilibrio deve essere:

$$K = s(t, k)\, K \sum_{j=1}^{k} v(t, t+j) + K v(t, t+k)$$

e pertanto se nelle precedenti fasi della procedura di bootstrapping sono già stati calcolati $v(t, t+1), ..., v(t, t+k-1)$, risolvendo rispetto a $v(t, t+k)$ si ottiene proprio la (83).

I soli problemi che possono sorgere nell'applicazione del metodo sono relativi al reperimento degli elementi della struttura corrispondenti a scadenze molto vicine (le quali ovviamente non sono coperte da contratti IRS) e l'assenza di quotazioni di tassi SWAP riferiti a scadenze semestrali (i listini riportano solo scadenze annuali). Per ovviare al primo inconveniente si utilizzano dati relativi a particolari contratti di breve scadenza come gli eurodollars futures, mentre i valori nei tempi intermedi, vale a dire i dati del tipo: $s(t, k + \frac{1}{2})$, sono ricavati per mezzo di interpolazioni lineari fra i tassi SWAP riferiti a periodi interi. Dato che la interpolazione avviene fra valori che sono distanziati di un anno, l'approssimazione lineare risulta senza altro accettabile.

Esempio 17 I tassi SWAP quotati il giorno 10 maggio 2001 sono riportati nella tabella seguente in base alle loro quotazioni denaro e lettera. La colonna relativa alla media fra i due riporta i dati in base ai quali i calcoli verranno effettuati. Per semplicità si è limitato l'orizzonte temporale a dieci anni.

Scad	Denaro	Lettera	Media
1 anno	4.54	4.55	4.545
2 anni	4.54	4.56	4.550
3 anni	4.64	4.66	4.650
4 anni	4.75	4.77	4.760
5 anni	4.86	4.88	4.870
6 anni	4.98	5.00	4.990
7 anni	5.09	5.11	5.100
8 anni	5.19	5.21	5.200
9 anni	5.28	5.30	5.290
10 anni	5.36	5.38	5.370

TABELLA 9

I valori interpolati corrispondenti ai periodi intermedi sono i seguenti

Scad	Tasso
1.5	$\frac{4.550+4.545}{2} = 4.5475$
2.5	$\frac{4.650+4.550}{2} = 4.6000$
3.5	$\frac{4.760+4.650}{2} = 4.7050$
4.5	$\frac{4.870+4.760}{2} = 4.8150$
5.5	$\frac{4.990+4.870}{2} = 4.9300$
6.5	$\frac{5.100+4.990}{2} = 5.0450$
7.5	$\frac{5.200+5.100}{2} = 5.1500$
8.5	$\frac{5.290+5.200}{2} = 5.2450$
9.5	$\frac{5.370+5.290}{2} = 5.3300$

TABELLA 10

ed infine, nella tabella seguente, è riportata la struttura completa dei tassi SWAP avendo integrato il valore corrispondente a sei mesi con il tasso relativo ad un OIS (Overnight InterestRate SWAP) calcolato ancora come media fra le quotazioni denaro e lettera.

Scad.	Tasso	Scad.	Tasso
0.5	4.450	5.5	4.930
1	4.545	6	4.990
1.5	4.547	6.5	5.045
2	4.550	7	5.100
2.5	4.600	7.5	5.150
3	4.650	8	5.200
3.5	4.705	8.5	5.245
4	4.760	9	5.290
4.5	4.815	9.5	5.330
5	4.870	10	5.370

TABELLA 11

Applicando una procedura costruita in base alla (83), ricordando che i tassi SWAP della tabella 9 sono su base annua, e che quindi vanno trasformati negli equivalenti semestrali, si ottiene la struttura per scadenza dei prezzi:

Scad.	v (t, t + j)	Scad.	v (t, t + j)
0.5	0.978466	5.5	0.766332
1	0.956516	6	0.745157
1.5	0.935466	6.5	0.724335
2	0.914842	7	0.703647
2.5	0.893595	7.5	0.683401
3	0.872399	8	0.663337
3.5	0.851115	8.5	0.643793
4	0.829873	9	0.624471
4.5	0.808689	9.5	0.605735
5	0.787580	10	0.587253

TABELLA 12

Una via alternativa per individuare il tasso SWAP di equilibrio è quella basata sulla costruzione di tanti portafogli di zcb quanti sono i periodi di vita del contratto, in modo che ogni portafoglio sia la replica di uno dei futuri importi che costituiscono la gamba variabile.

Si consideri a tal fine il generico pagamento da effettuare in t + k + 1 relativo alla parte variabile del contratto (per semplicità si pone anche K = 1). Esso è pari a i(t + k, t + k + 1). Questa quantità, ignota all'istante t, è nota all'istante t + k nel quale si giunge a conoscenza detasso relativo al periodo successivo [t + k, t + k + 1]. Il valore in t + k del pagamento in questione è dunque:

$$V_{t+k}^{var} = i(t + k, t + k + 1)v(t + k, t + k + 1). \qquad (84)$$

Si vuole ora esprimere V_{t+k}^{var} in funzione di sole quantità note in t.

A tal fine si costruisca in t il portafoglio Π_{k+1} composto da uno zcb scadente in t + k in posizione long e da uno zcb scadente in t + k + 1 in posizione short : $\Pi_{k+1} = (1, -1)$ Il suo valore in t è:

$$V_t^{\Pi} = v\,(t, t + k) - v\,(t, t + k + 1)$$

Valutato in t + k tale portafoglio vale

$$V_{t+k}^{\Pi} = \frac{v\,(t, t + k) - v\,(t, t + k + 1)}{v(t, t + k)} = 1 - \frac{v(t, t + k + 1)}{v(t, t + k)} = \qquad (85)$$
$$= 1 - v(t, t + k, t + k + 1).$$

Ma in t + k il portafoglio Π_{k+1} vale proprio 1 − v(t + k, t + k + 1), ovvero la lira che si incassa a quel tempo dal primo zcb meno il valore dello zcb scadente il periodo successivo, il prezzo a quell'istante è v(t + k, t + k + 1)E' così anche:

$$V_{t+k}^{\Pi} = 1 - v(t + k, t + k + 1) = 1 - \frac{1}{1 + i(t + k, t + k + 1)} = \qquad (86)$$
$$= i(t + k, t + k + 1)v(t + k, t + k + 1)$$

E dunque in base alla (84) e alla (86) $V_{t+k}^{var} = V_{t+k}^{\Pi}$.

Evidenti ragioni di assenza di arbitraggi impongono che i valori del portafoglio Π_{k+1} e della prestazione aleatoria i(t+k, t+k +1), da effettuare in t+k +1, permangano uguali in qualunque altro istante (motivare) ed in particolare all'istante t. Deve essere dunque $V_t^{var} = V_t^{\Pi}$, ovvero:

$$V_t^{var} = i(t + k, t + k + 1)v(t, t + k + 1) = v(t, t + k) - v(t, t + k + 1) = V_t^{\Pi}$$

e quindi

$$i(t + k, t + k + 1)v(t, t + k + 1) = v(t, t + k) - v(t, t + k + 1) \qquad (87)$$

e anche, ricordando la (12)

$$i(t + k, t + k + 1) = \frac{v(t, t + k) - v(t, t + k + 1)}{v(t, t + k + 1)} = i(t, t + k, t + k + 1). \qquad (88)$$

La (87) e la (88) impongono alcuni commenti. Innanzitutto ambedue derivano da condizioni di assenza di arbitraggi, e la prima ci dice che all' istante t il futuro pagamento aleatorio può essere replicato da un portafoglio di zcb di valore certo (membro di destra). Si noti bene che questo artificio non elimina la aleatorietà in t di i(t + k, t + k + 1) essendo aleatorio anche il termine v(t + k, t + k + 1) che si trova al membro di sinistra. Ciò che non è aleatorio è il valore in t del portafoglio di replica. La (88) poi mostra che le stesse condizioni di non arbitraggio implicano che i tassi futuri siano posti uguali ai tassi impliciti (forward) ricavabili dalla struttura vigente in t.

In conclusione, in base alla (88), il valore in t della gamba variabile, V_t^V diventa il valore attuale dei termini del tipo i(t, t + k, t + k + 1), k = 0, .., n − 1:

$$V_t^V = \sum_{k=0}^{n-1} i(t, t + k, t + k + 1)v(t, t + k + 1) \qquad (89)$$

Si noti ancora che V_t^V non è altro che il valore di un titolo a cedola implicita privato del rimborso finale, e quindi, ssendo un titolo di tale specie un par bond, è anche $V_t^V = 1 - v(t, t + n)$.

Indicando poi ancora con V_t^F il valore della gamba fissa, è:

$$V_t^F = s(t, n) \sum_{k=0}^{n-1} v(t, t + k + 1) \qquad (90)$$

e dovendo essere nullo il valore dello SWAP all' istante della sua nascita, deve essere quindi $V_t^V = V_t^F$, e dunque:

$$s(t, n) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} i(t, t + k, t + k + 1)v(t, t + k + 1)}{\sum_{k=0}^{n-1} v(t, t + k + 1)}.$$

Ponendo infine $w_{k+1} = \frac{v(t,t+k+1)}{\sum_{k=0}^{n-1} v(t,t+k+1)}$ si ottiene:

$$s(t, n) = \sum_{k=0}^{n-1} w_{k+1}\, i(t, t + k, t + k + 1) \tag{91}$$

La relazione (91) esprime il fatto che in condizioni di equilibrio il tasso SWAP riferito ad una determinata scadenza è una media ponderata dei tassi forward definiti dalla struttura vigente dei rendimenti.

Questo ultimo risultato fornisce una spiegazione immediata del perchè, in generale, il valore del contratto alle successive epoche $t + 1, t + 2, ..., t + n$ è diverso da zero: i tassi che si realizzano sul mercato saranno diversi dai tassi impliciti calcolati alla sua origine.

7.2.2 La Valutazione dei Contratti IRS.

Uno degli aspetti del contratto IRS che ha contribuito in maniera considerevole a far crescere il volume delle negoziazioni è la possibilità di cederlo ad altri soggetti nel corso della sua vita.Le operazioni già menzionate di reversing, unwinding o di assigning, generano quello che può essere definito il mercato secondario degli IRS. La cessione o la estinzione del contratto comporta una valuazione dello stesso in quanto le mutate condizioni del mercato fanno sì che una delle parti venga a trovarsi in una situazione di vantaggio rispetto all'altra.La valutazione dell'IRS durante la sua vità è dunque la determinazione dell'ammontare che deve essere corrisposto alla parte che è in posizione più vantaggiosa quando questa esce dal contratto. Come si vedrà, in questi casi i problemi nascono sostanzialmente in relazione alfatto che la valutazione, in genere, deve essere effettuata in istanti diversi da quelli nei quali cade un qualche pagamento. Da ciò deriva un disallineamento fra le cadenze dei pagamenti del vecchio contratto e le scadenze per le quali sono disponibili le quotazioni dei tassiSWAP.

Si consideri un contratto nato all' istante t e scadente in $t + n$. Il fisso per quel contratto sia $s(t, t + n)$. Si debba valutare il contratto in un istante τ appartenente all'intervallo $[t + k - 1, t + k]$, essendo gliestremi due successive scadenze per le cedoleSe τ coincide con uno degli istanti nei quali giungono a maturazione le cedole (sia ad esempio $\tau = t + k - 1$) alora, in aanlogia con la (81), e ricordando che il valore del titolo a perfetta indicizzazione alle scadenze delle cedole ha il valore di un par bond, si ha::

$$\begin{aligned} V_\tau^S &= Ks(t, n) \sum_{j=1}^{n-k+1} v(\tau, \tau + j) + Kv(\tau, \tau + n - k + 1) - K = \\ &= K \left[s(t, n) \sum_{j=1}^{n-k+1} v(\tau , \tau + j) + v(\tau , \tau + n - k + 1) - 1 \right] . \end{aligned} \tag{92}$$

In questo caso l'unica differenza rispetto alla (81) sta nella struttura per scadenza in base alla quale si effettua la valutazione: dovrà essere evidentemente quella vigente all'istante τ . Questa la si reperisce facendo riferimento ai tassi dei contratti SWAP che sono quotati all'epoca τ applicando la procedura del bootstapping vista nel precedente paragrafo. Coincidendo l'epoca di valutazione con quella di uno dei pagamenti, è possibile ricavare i fattori di attualizzazione $v(\tau, \tau + 1)$, $v(\tau, \tau + 2)$, ... direttamente dai tassi SWAP vigenti in τ : $s(\tau, \tau + 1)$, $s(\tau, \tau + 2)$, ...

E' opportuno, per valutare IRS, non utilizzare, quali fattori di attualizzazione, quelli ricavabili dal mercato dei titoli con cedola. Anche se questi ultimi possono essere utilizzati per determinare il tasso di equilibrio di un contratto (come è stato fatto per giungere alla (82)), è necessario ricordare che i due mercati, quello degli IRS e quello dei titoli con cedola, presentano caratteristiche diverse in relazione al rischio di adempimento. Il mercato degli IRS, benchè molto liquido, come si deduce dai volumi degli scambi o dalla esigua differenza fra le quotazioni denaro e lettera, ha come parti debitrici società private, mentre nel mercato dei titoli con cedola, utilizzati per ricavare le strutture, il debitore è lo Stato. Dunque per valutare un contratto che già esiste, inserito nel mercato degli IRS e non in quello dei titoli con cedola, è necessario utilizzare una struttura direttamente deducibile dallo stesso mercato degli SWAPS. I fattori di attualizzazione devono essere quelli calcolati secondo la (83), cioè:

$$v(\tau, \tau + j) = \frac{1 - s(\tau, j) \sum_{j=1}^{k-1} v(\tau, \tau + j)}{1 + s(\tau, j)} .$$

Nel caso τ coincida con uno degli istanti nei quali si effettuano pagamenti è dunque sufficiente seguire la (92), se però τ è un punto interno all'intervallo $[t + k - 1, t + k]$, ovvero $\tau = t + k - 1 + \vartheta$, $(0 < \vartheta < 1)$, allora l'equivalente della (92) è:

$$\begin{aligned} V_\tau^S &= Ks(t, n) \sum_{j=1}^{n-k+1} v(\tau, \tau - \vartheta + j) + Kv(\tau, \tau - \vartheta + n - k + 1) - \\ &\quad -Kv(\tau, t + k) - C_{t+k}\, v(\tau, t + k) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} V_\tau^S &= Ks(t, n) \sum_{j=1}^{n-k+1} v(\tau, \tau - \vartheta + j) + Kv(\tau, \tau - \vartheta + n - k + 1) - \\ &\quad -v(\tau, t + k)\, [K + C_{t+k}] . \end{aligned} \qquad (93)$$

dove C_{t+k} rappresenta l'ammontare della cedola variabile di prossima scadenza (nota nel suo ammontare) che occorre attualizzare separatamente affinchè si possa trattare il titolo indicizzato come un par bond. (Si noti che poichè τ non coincide con una scadenza delle cedole, il par bond viene valutato alla prosima scadenza $t + k$ e successivamente attualizzato.)

Per applicare la (93) occorrerebbe potere determinare i fattori di attualizzazione $v(\tau, \tau - \vartheta + j)$ in base alla (83), ma essendo le scadenze $\tau - \vartheta + j$ non intere, non è possibile utilizzare i tassi SWAP $s(\tau, j)$ che sono disponibili solo per scadenze j intere.

Una soluzione potrebbe essere quella di interpolare fra i tassi $s(\tau, j)$ per ottenere quelli relativi a periodi frazionari, ovvero interpolare fra i fattori di attualizzazione $v(\tau, \tau + j)$ una volta che questi siano stati calcolati con il metodo del bootstrapping.Ma questa non è la via utilizzata nella pratica. Gli operatori fanno ricorso ad una procedura di calcolo, decisamente più complessa, ma nella quale è ridotto al minimo il ricorso alla approssimazione.

L'idea sottostante alla procedura è quella di costruire un contratto IRS fittizio, detto comparision SWAP, come se all'istante $\tau \in (t + k - 1, t + k)$ si desse vita ad un nuovo contratto (che deve quindi avere valore zero) il quale abbia il medesimo scadenziario di quello da valutare (ossia un primo scambio in $t + k$ a distanza $1 - \vartheta$ dalla data di valutazione, ed i successivi scambi in $t + k + j$, fra loro distanziati di un periodo). Inoltre si impone che il comparision SWAP abbia la stesa gamba variabile di quello originario.

Il comparision SWAP incorpora così le caratteristiche del mercato all'istante di valutazione attraverso il ricorso ai tassi SWAP effettivamente quotati all'istante τ. L'imporre l'identità dei pagamenti variabili con quelli dello SWAP originario fà sì che la differenza dei flussi dei due strumenti, quello originario e quello fittizio, annulli la gamba variabile fornendo un flusso differenziale la cui valutazione, in base ai tassi SWAP di mercato, rappresenta proprio il valore del contratto originario.

Le fasi che occorre percorrere per giungere alla valutazione possono essere riassunte nelle seguenti:

A. Costruzione del comparision SWAP come un contratto di nuova costituzione di valore nullo, con la stessa gamba variabile di quello da valutare e con la gamba fissa determinata in base ai tassi SWAP vigenti in τ.

B. Determinazione dei residui, rappresentati dalle differenze fra i pagamenti fissi dei due SWAPS.

C. Valutazione, in base alla struttura vigente sul mercato SWAP, dei residui per ottenere il valore cercato del contratto nato all'epoca t.

Per quanto concerne il punto A, il comparision SWAP ha lo scadenziario:

$$\{\tau - \vartheta + 1, \tau - \vartheta + 2, ..., \tau - \vartheta + (n - k)\}$$

nel quale il primo elemento è una frazione di semestre, mentre i successivi sono a cadenza semestrale.

Un aggiustamento deve essere dunque fatto per tenere conto di questo primo pagamento il quale non può essere integrale,ma se ne dovrà determinare una sorta di rateo.

Inoltre la scadenza finale $\tau - \vartheta + n$ non è di quelle che compaiono nei listini dei tassi SWAP disponibili in τ, in quanto le quotazioni riguardano solo scadenze annuali intere. Non è così possibile reperire il tasso SWAP $s(\tau, \tau + 1 + \vartheta + n - k)$ in base al quale calcolare la gamba fissa del contratto. Per ovviare all'inconveniente si devono prendere in considerazione i due tassi quotati con scadenza anteceriore e posteriore a quella voluta e interpolare fra questi per ottenere il tasso voluto (che sarà india.to con s^*).

Gli importi della gamba fissa (a partire dal secondo) del comparision SWAP saranno quindi di ammontare Ks^*.

Come già accennato il primo pagamento non può essere fatto pari a Ks^*, poichè in τ parte dell'importo è già maturato e ciò di cui si deve tenere conto è una quota che corrisponde al tempo che ancora manca alla sua scadenza. Si deve così calcolare un rateo per il periodo $1 - \vartheta$. Tenuto conto che si sta operando con tassi, dato quindi quindi quello riferito all'intero periodo s^*, si deve determinare quello equivalente (in capitalizzazione composta) riferito alla frazione di periodo. Indicando quest'ultimo con s^{**} si ha:

$$s^{**} = (1 + s^*)^{1-\vartheta} - 1$$

Il primo importo fisso, esigibile in $\tau - \vartheta + 1$, è dunque pari a Ks^{**}.

Il flusso del comparision SWAP è dunque:

$$\{\tau - \vartheta + 1, \tau - \vartheta + 2, ..., \tau - \vartheta + (n - k)\} / \{Ks^{**}, Ks^*, ..., Ks^*\} .$$

Per quanto concerne la gamba variabile, il flusso relativo a questa, nel comparision SWAP, coincide con quello del contratto originario, eccetto il primo elemento il quale, essendo disallineato riguardo alla scadenza (esattamente come accade per la gamba fissa) va incluso nel calcolo sotto forma di rateo riferito al periodo che lo separa dalla sua scadenza (cioè $1 - \vartheta$).

Nella prassi la trasformazione del tasso LIBOR (rilevato alla scadenza che precede τ) nell'equivalente tasso riferito al periodo $1 - \vartheta$ avviene in regime di capitalizzazione semplice a differenza di quanto accade per valutare il rateo della gamba fissa. Quindi se L_{t+k} è il tasso LIBOR semestrale quotato all'ultima scadenza t + k, il tasso per la frazione di periodo L^{**}_{t+k} viene determinato nel modo seguente:

$$L^{**}_{t+k} = (1 - \vartheta)L_{t+k}$$

ed il flusso relativo alla gamba variabile diventa:

$$\{\tau - \vartheta + 1, \tau - \vartheta + 2, ..., \tau - \vartheta + (n - k)\} / \left\{KL^{**}_{t+k}, Ki(\tau - \vartheta + 1, \tau - \vartheta + 2)..., Ki(\tau - \vartheta + n - k - 1, \tau - \vartheta + n - k)\right\}$$

ove si tenga presente che i tassi del tipo $i(\tau - \vartheta + j, \tau - \vartheta + j + 1)$ non sono noti in τ ma sono coincidenti con quelli del contratto originario.

Il punto B richiede ora che si calcolino i residui quali differenze fra gli elementi del flusso generato dal contratto originario e gli elementi del comparision SWAP.

Per quanto concerne la gamba variabile, dalla seconda scadenza in poi i valori dello SWAP originario e del comparision SWAP coincidono e pertanto si elidono. Il primo importo è comunque noto (è il valore KL^{**}_{t+k} per il comparion SWAP e L_{t+k} per quello originario).

Indicando con ρ_j il generico elemento del fluso dei residui, il primo elemento diventa così:

$$\rho_1 = [Ks(t, n) - L_{t+k} K] - \left[Ks^{**} - KL^{**}_{t+k}\right] = K\left[s(t, n) - s^{**} + L^{**}_{t+k} - L_{t+k}\right] \tag{94}$$

dove $s(t, n)K - L_{t+k} K$ è il saldo in $t + k$ generato dal contratto originario, mentre $Ks^{**} - KL^{**}_{t+k}$ è quello riferito al comparision SWAP.

Gli elementi successivi dei residui, come già evidenziato, contengono solo le differenze relative alle gambe fisse e sono pertanto:

$$\rho_j = Ks(t, n) - Ks^*, \qquad j = 2, ..., n - k. \tag{95}$$

Il punto C consiste nella attualizzazione, degli importi che costituiscono i residui.

Per prima cosa si attualizzano, in base al tasso s^*, gli importi costanti $\rho_2 = \rho_3 = ... = \rho_{n-k} = Ks(t, n) - Ks^*$ che costituiscono una rendita di $n - k - 1$ rate costanti. Si ottiene così:

$$R = [Ks(t, n) - Ks^*] \frac{1 - (1 + s^*)^{-(n-k-1)}}{s^*}$$

Questgo valore viene a collocarsi al tempo della prima scadenza, in coincidenza al primo pagamento ρ_1. Tenuto conto anche di ρ_1, alla prima scadenza si avrà così l'importo

$$R+\rho_1 = K\,[s(t, n) - s^*] \frac{1 - (1 + s^*)^{-(n-k-1)}}{s^*} + K\left[s(t, n) - s^{**} + L^{**}_{t+k} - L_{t+k}\right]$$

da scontare per il periodo $1 - \vartheta$ in regime di capitalizzazione semplice e al tasso equivalente al LIBOR L_{t+k}. E poichè il tasso equivalente, in regime di capitalizzazione semplice, lo si ottiene moltiplicando il tasso di periodo intero per la frazione di periodo, il tasso equivalente che si ottiene è ancora L^{**}_{t+k}.

Il valore dell'IRS è così:

$$V^S_T = \frac{K\,[s(t, n) - s^*] \frac{1-(1+s^*)^{-(n-k-1)}}{s^*} + K\left[s(t, n) - s^{**} + L^{**}_{t+k} - L_{t+k}\right]}{1 + L^{**}_{t+k}}.$$

La procedura illustrata, apparentemente laboriosa è quella che viene adottata dai brokers che operano nei mercati SWAP. Si tenga anche presente che in quanto esposto si è supposto che la parte variabile fosse semplicemente determinata dal tasso LIBOR senza alcun surplus e che la cadenza dei pagamenti delle due gambe coincidessero (può accadere, ad esempio, che i pagamenti della gamba fissa siano annuali mentre quelli della variabile sono semestrali).

Il seguente esempio, infine, illustra una applicazione della procedura.

Esempio 18 Un contratto nato in $t = 0$ di durata quattro anni prevede l'incasso di importi semestrali fissi in base al tasso semestrale $s(0, 4) = 0.046$, contro pagamento del tasso LIBOR con medesima cadenza. Il nozionale è pari a 1000. Si vuole valutare il contratto dopo un anno e un mese e dieci giorni, cioè in $\tau = 1 + \frac{1}{12} + \frac{10}{365} = 1.1107$. La struttura dei tassi SWAP, riferiti alla base annua, vigenti in τ è la seguente:

$s(\tau, 1)$	0.084
$s(\tau, 2)$	0.088
$s(\tau, 3)$	0.091

mentre l'ultimo LIBOR semestrale rilevato (al tempo $t = 1$) è $L_1 = 0.051$. In τ la durata residua dello SWAP è: $4 - 1.1107 = 2.8893$ e pertanto per costruire il comparision SWAP occorre determinare il tasso SWAP di equilibrio riferito a questa durata:

$$s(\tau, 2.8893) = s^* = 0.088 + (0.091 - 0.088)(2.8893 - 2) = 0.090668$$

Il tasso trovato va trasformato in semestrale (nella prassi si usa approssimare ulteriormente dividendo per due). E' quindi:

$$(1 + 0.090668)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.044351.$$

Per determinare il primo importo della gamba fissa del comparision SWAP occorre determinare il tasso equivalente a s^{**} riferito al periodo che va da τ alla prima scadenza successiva $(1.5 - 1.1107 = 0.3893)$:

$$s^{**} = (1 + 0.090668)^{0.3893} - 1 = 0.034365$$

e quindi il primo elemento del flusso della gamba fissa è 34.365. Per completare la fase A resta solo da determinare il primo elemento variabile del comparision SWAP. Essendo l'ultimo LIBOR semestrale rilevato pari a $L_1 = 0.051$, si ha che è

$$L_\tau^{**} = 0.102\,(0.3893) = 0.039709$$

e quindi il primo pagamento variabile è pari a 39.709. Si possono, a questo punto esprimere i flussi relativi allo SWAP originario

SWAP ORIGINARIO

Scadenza	Flusso Fisso	Flusso Var.
1.5	46	51
2.0	46	$x_{2.0}$
2.5	46	$x_{2.5}$
3.0	46	$x_{3.0}$
3.5	46	$x_{3.5}$
4.0	46	$x_{4.0}$

TABELLA 13

e quelli relativi al comparision SWAP:

COMPARISION SWAP

Scadenza	Flusso Fisso	Flusso Var.
1.5	34.365	39.709
2.0	44.351	$x_{2.0}$
2.5	44.351	$x_{2.5}$
3.0	44.351	$x_{3.0}$
3.5	44.351	$x_{3.5}$
4.0	44.351	$x_{4.0}$

TABELLA 14

Infine si costruisccono i residui essendo il primo elemento pari a 46 − 51 − 34.365 + 39.709 = . 344

RESIDUI

Scadenza	Flusso Fisso
1.5	0.344
2.0	1.649
2.5	1.649
3.0	1.649
3.5	1.649
4.0	1.649

TABELLA 15

Si tratta ora di attualizzare il flusso generato dai residui

$$(0.344 + 1.649\frac{1 - 1.044351^{-5}}{0.044351})[1 + (0.3893)0.102]^{-1} = 7.\,306\,1.$$

Si tenga presente che la attualizzazione relativa alla frazione di anno 0.3893 viene fatta in regime di capitalizzazione semplice al tasso LIBOR della ultima rilevazione.Il valore dello SWAP è dunque 8.5286 e quindi tale è l'ammontare che viene richiesto a chi subentra nella posizione di pagatore del variabile al tempo τ .

8 Rischio di Tasso e Immunizzazione Finanziaria.

L'instabilità dei mercati finanziari, particolarmente accentuata negli ultimi decenni, ha spinto gli studiosi verso la ricerca di tecniche che siano in grado, se non di eliminare gli indrsiderati effetti delle fluttuazioni dei prezzi, almeno di smorzarne la portata. Moltri nuovi strumenti finanziari fra quelli che stanno guadagnandosi il diritto di sopravvivenza sui mercati nascono finalizzati ad obiettivi di copertura (hedging), e fra questi numerosi sono quelli che sono indirizzati verso il rischio di tasso. Come il termine stesso indica, questa tipologia di rischio si manifesta attraverso quelle perturbazioni dei mercati finanziari che interessano il settore dei bonds causando alterazioni nelle strutture per scadenza dei rendimenti. E' facile immaginare come un investitore, o un intermediario finanziario, possano essere esposti al rischio di tasso. Il primo deve fronteggiare l'aleatorietà delle future condizioni di mercato se il proprio investimento in titoli deve essere smobilizzato prima della scadenza e, in ogni caso, quando deve reinvestire le cedole che via via gli vengono pagate. L'intermediario, che per per sua naturale funzione svolge contemporaneamente il ruolo di creditore e di debitore, ha necessità di investire eccedenze di liquidità che successivamente verranno utilizzate per fare fronte agli impegni assunti. Una corretta pianificazione di entrate ed uscite, gestita ricorrendo ad investimenti obbligazionari, può essere pesantemente condizionata da improvvisi shock che colpiscono i rendimenti lasciando esposto l'intermediario al rischio di insolvenza.

L'immunizzazione finanziaria, della quale saranno ora delineati i fondamenti in un contesto relativamente semplificato, è una delle tecniche che sin dagli anni settanta è stata largamente impiegata per cercare di sterilizzare il rischio insito nell'utilizzo di strumenti finanziari dipendenti dall'andamento dei tassi di mercato. Prima di affrontarne gli aspetti tecnici dell'immunizzazione è possibile chiarirsi le idee sulla natura del rischio di tasso e sui mezzi per fronteggiarlo presentando alcune semplici situazioni in cui esso si manifesta.

Si consideri una tipica situazione che coinvolge un intermediario a fronte di un impegno (liability) che deve assolvere in un epoca futura egli deve investire una certo importo (si pensi, ad esempio, ad un fondo pensioni che deve gestire quanto ha incassato sotto forma di premi dai propri assicurati, per essere in grado di effettuare i pagamenti futuri). Il ricorso al mercato dei bonds potrebbe rislvere il suo problema se ivi fossero negoziati zcb la cui scadenza coincide con quella dell'impegno. Se, come accade generalmente, non è possibile questo ideale matching di scadenze, sempre limitando l'analisi al semplice caso in cui si ricorre escluzsivamente agli zcb, qualora vengano utilizzati titoli con scadenza più breve, non appena questi vengono rimborsati è necessario reinvestire il ricavato in altri titoli della stessa specie (operazione di roll over delle scadenze). Evidentemente le condizioni di remuneratività del mercato nei periodi futuri sono ignote all'istante iniziale ed incerta quindi sarà anche la previsione del risultato finale dell'investimento. Se viceversa si potessero scegliere zcb con scadenza più lontana di quella programmata, giunti alla data fissata quale orizzonte temporale, il titolo dovrà essere venduto ed il suo prezzo sarà determinato dalle future condizioni del mercato. E queste, generalmente, saranno diverse da quelle vigenti al momento nel quale l'operazione è stata posta in essere.

Come è facile intuire, in ambedue le circostanze, il risultato al quale si perviene sarà diverso da quello che era stato programmato all'origine, e proprio in questa impossibilità di raggiungere un obiettivo finanziario prestabilito sta l'essenza del rischio di tasso. Le differenti modalità con le quali esso si manifesta, per la necessità di dovere ripetere l'investimento o per doverlo interrompere prima della naturale scadenza, consentono di trattarlo come rischio di reinvestimento o come rischio di smobilizzo.

In generale queste due componenti viaggiano appaiate nel senso che, salvo casi privi di interesse pratico, l'operatore si trova a fronteggiarle entrambe contemporaneamente. Il più evidente esempio di simultanea presenza di rischio di reinvestimento e rischio di smobilizzo è quello nel quale in portafoglio sono presenti titoli con cedola che scadono dopo la data assunta qaule orizzonte temporale per la liability. Qui è la necessità di reinvestire le cedole che vengono via via incassate a generare il primo tipo di rischio, mentre il secondo si manifesta con la vendita anticipata del titolo. Tuttavia, è proprio da questo abbinamento dei due elementi di rischio, e dai loro effetti di segno contrario, che discende la possibilità di costruire portafogli che risultino immuni dal rischio di tasso.

Per chiarire come i due tipi di rischio agiscono sull'investimento, si ipotizzi che ad un certo istante si manifesti una variazione sul mercato per la quale tutti i tassi di rendimento subiscono un incremento. Se non si producono altre perturbazioni fino al tempo del disinvestimento del bond, al momento della vendita del titolo i più elevati tassi del mercato, comportando più bassi fattori di sconto, faranno sì che il valore attuale delle future cedole e del capitale sia minore di quello che sarebbe stato in assenza divariazioni della struttura. Il rischio di smobilizzo si traduce, in questo caso, in una perdita di valore del bond. Per quanto riguarda gli importi che si liberano fino all'epoca del disinvestimento, d'altro lato, potendo essere reinvestiti a condizioni di rendimento migliori di quelle originarie, contribuiranno ad elevare il valore cumulato, traducendo così il rischio di reinvestimento in un guadagno.

Se poi la variazione dei rendimenti fosse in ribasso, allora si ridurrebbe anche il valore accumulato alla scadenza, mentre sarebbe maggiore (per effetto dei più elevati fattori di attualizzazione che in questo caso verrebbero applicati dal mercato) il valore residuo del titolo. In questa situazione il rischio di reinvestimento condurrebbe a una perdita e contestualmente si fruirebbe di un guadagno in conseguenza del rischio di smobilizzo.

Ciò che è interessante mettere in evidenza è il fatto che nelle due situazioni ipotizzate le componenti del rischio di tasso hanno segno opposto. E' lecito allora chiedersi se, sfruttando questa proprietà, sia possibile individuare una scadenza da dare alla liability che abbia la proprietà di bilanciare esattamente, facendole annullare, queste due componenti del rischio di tasso.

La risposta affermativa a questa domanda rappresenta il primo gradino della teoria della immunizzazione finanziaria.

8.1 Un Primo Schema di Immunizzazione Finanziaria.

Chiarita la natura del problema di immunizzazione che dovrà essere affrontato, si può procedere alla sua formalizzazione.

Lo schema al quale si fa riferimento per introdurre il concetto di immunizzazione finanziaria è quello nel quale un operatore al tempo presente t, a fronte di un impegno (liability) di ammontare L scadente all'epoca T , ha costituito un portafoglio il cui flusso di entrate è rappresentato dal vettore $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$, $y_j \geq 0$ articolato sullo scadenziario $\overline{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$ con $t_1 < T < t_m$. Posto che in t sia nota la struttura per scadenza v (t, s), si definisce l'equilibrio finanziario del portafoglio nei confronti della liability nel modo seguente.

Definizione 19 (Condizione di bilancio) Dato un flusso $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ di entrate esigibili in base allo scadenziario $\bar{T} = (t_1, t_2, ..., t_m)$, ed un impgno di uscita al tempo $T < t_m$ di ammontare L, se v (t, s) è la struttura per scadenza in vigore all'istante $t < t_1$, il flusso $\bar{y}$ è detto in equilibrio rispetto all'impegno L se vale la relazione:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \, v(t, t_j) = L v(t, T), \tag{96}$$

ovvero, ponendo che $h(t, s) = -\frac{1}{s-t} \ln [v(t, s)]$ sia il rendimento a scadenza:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j \, e^{-h(t,t_j)(t_j-t)} = L e^{-h(t,T)(T-t)}. \tag{97}$$

La condizione di equilibrio finanziario, detta anche condizione di bilancio, impone che all'istante iniziale t il valore scontato del flusso in entrata sia pari al valore scontato della liability.

Una qualunque variazione della struttura iniziale fa venire meno l'ugualianza fra i valori scontati delle entrate e dell'uscita, esponendo così l'operatore al rischio di non poter fare fronte, al tempo T, all'impegno assunto. Immunizzarsi significa proprio predisporre le condizioni affinchè, sotto l'ipotesi che la variazione che interviene nella struttura sia di un qualche specifico tipo, il flusso in entrata garantisca ancora la copertura della passività.

Preliminare ad ogni sviluppo della teoria è la definizione esatta delle condizioni nelle quali si opera ovvero, nel caso presente, il tipo di variazione che la struttura per scadenza dei rendimenti può subire e l'istante nel quale la stessa si manifesta.

La situazione più semplice che può essere presa in considerazione è quella in cui si ammette che la perturbazione si manifesti immediatamente dopo l'istante iniziale t, e che la variazione prodotta su tutti i rendimenti sia del medesimo ammontare. La curva dei rendimenti (si farà riferimento al rendimento a scadenza, o al suo equivalente l'intensità istantanea di interesse) viene sottoposta così ad uno spostamento parallelo, verso l'alto o verso il basso, di arbitrario ammontare.

Definizione 20 (Shift additivo) Data la struttura per scadenza dei rendimenti a scadenza (yield to maturity) h (t, s), uno shift additivo di ampiezza λ che si verifica in t^+ (ovvero un istante immediatamente dopo t) è una perturbazione delle condizioni di rendimento del mercato in seguito alla quale la struttura $h(t^+, s)$ assume la forma:

$$h\left(t^+, s\right) = h(t, s) + \lambda. \tag{98}$$

L'avere scelto il rendimento a scadenza per definire lo shift additivo dipende solo da comodità di notazione. Infatti è immediato ricavare l'analoga definizione per l'intensità istantanea di interesse (ovvero il tasso forward istantaneo). Tenendo conto della (30) si ha:

$$h\left(t^+, s\right) = \frac{1}{s - t^+} \int_{t^+}^{s} \delta\left(t^+, u\right) du$$

ed essendo anche $h\left(t^+, s\right) = h(t, s) + \lambda$ è:

$$h(t, s) + \lambda = \frac{1}{s - t^+} \int_{t^+}^{s} \delta\left(t^+, u\right) du$$

ma è anche:

$$\begin{aligned} h(t, s) + \lambda &= \frac{1}{s-t} \int_{t}^{s} \delta(t, u)\, du + \lambda = \frac{1}{s-t} \left[\int_{t}^{s} \delta(t, u)\, du + \lambda (s - t) \right] = \\ &= \frac{1}{s-t} \int_{t}^{s} [\delta(t, u) + \lambda]\, du \end{aligned}$$

ed infine:

$$\frac{1}{s-t} \int_{t}^{s} [\delta(t, u) + \lambda]\, du = \frac{1}{s - t^+} \int_{t^+}^{s} \delta\left(t^+, u\right) du$$

da cui:

$$\delta\left(t^+, s\right) = \delta(t, s) + \lambda. \qquad (99)$$

Come era facile intuire ad uno shift additivo nella curva dei rendimenti a scadenza corrisponde un analogo shift additivo nella intensità istantanea.

Per il fattore di attualizzazione $v(t^+, s)$ si ha poi:

$$\begin{aligned} v\left(t^+, s\right) &= e^{-h\left(t^+, s\right)\left(s - t^+\right)} = e^{-[h(t,s)+\lambda](s-t)} = \qquad (100) \\ &= e^{-h(t,s)(s-t)}\; e^{-\lambda(s-t)} = v(t, s)\, e^{-\lambda(s-t)} \;. \end{aligned}$$

Lo shift additivo additivo che colpisce i rendimenti si traduce dunque in un effetto moltiplicativo nei fattori di attualizzazione. Tenendo conto della identità fra prezzi di zcb e fattori di attualizzazione si ottiene anche:

$$P\left(t^+, s\right) = P(t, s)\, e^{-\lambda(s-t)} \qquad (101)$$

Questa ultima relazione conferma risultati ormai noti: se è $\lambda > 0$ allora è $e^{-\lambda(s-t)} < 1$ e conseguentemente $P(t^+, s) < P(t, s)$. Così un incremento nella curva dei rendimenti porta ad una diminuzione del valore degli zcb. Se è invece $\lambda < 0$, si ottiene l'effetto contrario: $P(t^+, s) > P(t, s)$.

Per quanto riguarda i tassi di rendimento effettivi $i\left(t^{+}, s\right)$ si ha infine:

$$1+i\left(t^{+}, s\right) = \left(\frac{1}{v\left(t^{+}, s\right)}\right)^{\frac{1}{s-t^{+}}} = \left(\frac{1}{v(t, s)\, e^{-\lambda(s-t)}}\right)^{\frac{1}{s-t}} = \tag{102}$$

$$= \left(\frac{e^{\lambda(s-t)}}{v(t, s)}\right)^{\frac{1}{s-t}} = e^{\lambda}\left(\frac{1}{v(t, s)}\right)^{\frac{1}{s-t}} = e^{\lambda}\,[1+i(t, s)]$$

la cui interpretazione, anche in relazione alla (100), è lasciata al lettore.

Definita così la tipologia delle perturbazioni che verranno prese in esame, è ora possibile definire immunizzazione di un flusso di attività rispetto ad una definita liability. Si indicheranno con $W\left(t^{+}, \bar{y}\right)$ e $W\left(t^{+}, L\right)$ il valore, in t^{+}, del flusso in entrata e dell'impegno.

Definizione 21 (Immunizzazione) Dato un flusso $y = \left(\bar{y}_1, y_2, \ldots, y_m\right)$ di entrate, riferite allo scadenziario $\bar{\tau} = \left(t_1, t_2, \ldots, t_m\right)$, e dato un impegno di ammontare L scadente in T, il flusso $\bar{y}$ è detto immunizzato rispetto all'impegno L se, nel caso si verifichi in t^{+} uno shift di tipo additivo, il valore del flusso a quel momento risulta non minore del valore dell'impegno allo stesso istante. In simboli, si ha immunizzazione se è

$$W\left(t^{+}, \bar{y}\right) \geq W\left(t^{+}, L\right). \tag{103}$$

Esprimendo $W\left(t^{+}, \bar{y}\right)$ e $W(t, L)$ in funzione dei fattori di attualizzazione la (103) assume la forma:

$$\sum_{j=1}^{m} y_j\, v\left(t^{+}, t_j\right) \geq L v\left(t^{+}, T\right). \tag{104}$$

Per individuare le condizioni che conducono alla immunizzazione si prendano ora le mosse dall'ipotesi che sia rispettata la condizione iniziale di bilancio data dalla (96). Si introduca poi la funzione:

$$\Psi(\gamma) = \frac{W\left(t^{+}, \bar{y}\right)}{W\left(t^{+}, L\right)}. \tag{105}$$

La funzione $\Psi(\lambda)$ dipende dell'entità dello shift λ, e sotto la condizione di equilibrio finanziario, è poi $\Psi(0) = 1$. La condizione di immunizzazione, rappresentata dalla (103), esprimendola ora tramite $\Psi(\lambda)$, assume la forma:

$$\Psi(\lambda) = \frac{W\left(t^{+}, \bar{y}\right)}{W\left(t^{+}, L\right)} \geq 1 \tag{106}$$

Esplicitando la (105) e tenedo conto della (100) si ha poi:

$$\Psi(\lambda) \;=\; \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t^+, t_j)}{Lv(t^+, T)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\, e^{-\lambda(t_j - t)}}{Lv(t, T)\, e^{-\lambda(T-t)}} = \tag{107}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\, e^{\lambda(T - t_j)}}{Lv(t, T)}$$

Derivando due volte la (107) si ottiene:

$$\frac{d\Psi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\,(T - t_j)\, e^{\lambda(T - t_j)}}{Lv(t, T)} \tag{108}$$

$$\frac{d^2\Psi(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\,(T - t_j)^2\, e^{\lambda(T - t_j)}}{Lv(t, T)}. \tag{109}$$

Essendo $\frac{d^2\Psi(\lambda)}{d\lambda^2} > 0$, per qualunque λ, la $\Psi(\lambda)$ risulta essere una funzione convessa. In quanto essa tale presenta un unico minimo. Per individuarlo è dunque sufficiente annullare la derivat prima, ottenendo la condizione:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\,(T - t_j)\, e^{\lambda(T - t_j)} = 0$$

ovvero

$$T \sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\, e^{\lambda(T - t_j)} = \sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\, t_j\, e^{\lambda(T - t_j)}$$

da cui:

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\, t_j\, e^{\lambda(T - t_j)}}{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\, e^{\lambda(T - t_j)}}. \tag{110}$$

Dalla (106) si ha che vi è immunizzazione se è $\Psi(\lambda) \geq 1$, e poichè si è visto che è $\Psi(0) = 1$, la condizione di immunizzazione è verificata se l'unico minimo è in corrispondenza di $\lambda = 0$.

In tal caso, per ogni $\lambda \neq 0$, è necessariamente $\Psi(\lambda) \geq 1$.

Così ponendo $\lambda = 0$ nella (110) si ottiene la seguente condizione diimmunizzazione:

$$T = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)\, t_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j\, v(t, t_j)}.$$

Ponendo poi

$$\omega_j = \frac{y_j\, v(t, t_j)}{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t, t_j)}, \tag{111}$$

la relazione precedente diventa:

$$T = \sum_{j=1}^{m} \omega_j\, t_j\,. \tag{112}$$

Osservazione 22 I coefficenti ω_j sono il rapporto fra il valore attualizzato (in base alla struttura per scadenza vigente in t) di ciascun elemento del flusso ed il valore attualizzato dell'intero flusso generato dal portafoglio. Essendo $\omega_j \geq 0$ con $\sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1$, i coefficienti ω_j assumono il significato di pesi.

La condizione di immunizzazione impone dunque che la scadenza della liability sia una media ponderata delle epoche nelle quali si rendono disponibili gli importi generati dal portafoglio.

Sottraendo t ad ambedue i membri della (112) si ottiene:

$$T - t = \sum_{j=1}^{m} \omega_j\, (t_j - t) \tag{113}$$

la quale traduce la relazione precedente in termini di distanze temporali rispetto all'epoca presente t.

Riassumendo quanto sin qui esposto, si enuncia il seguente teorema di immunizzazione.

Teorema 23 (Teorema di Fisher e Weil) Dato un flusso $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ di entrate, riferito allo scadenziario $\tau = (t_1, t_2, ..., t_m)$ ed una liability di ammontare L scadente al tempo T, fissata l'epoca iniziale t alla quale è stata rilevata la struttura per scadenza v (t, s), posto che un istante immediatamente dopo t si verifichi uno shift additivo nella struttura dei rendimenti (yield to maturity) di arbitraria entità λ in seguito al quale la nuova struttura diventi:

$$h\left(t^+, s\right) = h\,(t, s) + \lambda$$

e di conseguenza

$$v\left(t^+, s\right) = v\,(t, s)\, e^{-\lambda(s-t)}\,,$$

allora, ponendo $\omega_j = \frac{y_j\, v(t,t_j)}{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t,t_j)}$, se in t valgono le due condizioni:

1. $\sum_{j=1}^{m} x_j\, v\,(t, t_j) = Lv(t, T)$
2. $\sum_{j=1}^{m} \omega_j\, (t_j - t) = T - t$

il flusso $\bar{y}$ risulta immunizzato rispetto all'impegno L scadente in T .

A prima vista la portata del teorema appena presentato può sembrare di pura natura teorica, non tanto per il vincolo sul tipo di perturbazione, quanto per il fatto che lo shift rispetto al quale si è immunizzati deve verificarsi proprio un istante dopo che la strategia di immunizzazione è posta in essere.

Riguardo a questo ultimo punto però, è possibile dare una estensione del risultato così da garantire l'immunizzazione per tutto un intervallo.

Si può infatti provare che se in t valgono le due condizioni $\sum_{j=1}^{m} x_j v(t, t_j) = Lv(t, T)$ e $\sum_{j=1}^{m} \omega_j (t_j - t) = T - t$, allora se t^* è un qualunque istante successivo a t fino al quale non si è prodotto ancora alcuno shift, e se inoltre t^* è antecedente a t_1, allora, se ω_j^* sono i nuovi pesi in funzione dei nuovi fattori di attualizzazione, valgono le due condizioni:

$$\sum_{j=1}^{m} x_j v(t^*, t_j) = Lv(t^*, T)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_j^* (t_j - t^*) = T - t^*$$

le quali estendono l'immunizzazione fino all'istante t^*.

Sia dunque $t^* \in (t, t_1)$ un istante nel quale, non essendosi verificata alcuna perturbazione, le condizioni di mercato sono le stesse che operavano in t. I prezzi $P(t^*, s)$ a questo istante coincidono pertanto con i prezzi forward impliciti nella struttura al tempo t. Ovvero $P(t^*, s) = P(t, t^*, s)$. Inoltre, per la (10) si ha anche:

$$P(t, t^*, s) = \frac{P(t, s)}{P(t, t^*)}$$

da cui

$$P(t^*, s) = \frac{P(t, s)}{P(t, t^*)}.$$

Conseguentemente

$$v(t^*, s) = \frac{v(t, s)}{v(t, t^*)}. \tag{114}$$

Sostituendo la (114) nella prima condizione del teorema 23 si ottiene:

$$v(t, t^*) \sum_{j=1}^{m} y_j v(t^*, t_j) = Lv(t^*, T) v(t, t^*)$$

da cui

$$\sum_{j=1}^{m} y_j v(t^*, t_j) = Lv(t^*, T) \tag{115}$$

relazione che mostra come in t^* sia ancora valida la prima condizione di immunizzazione.

Per quanto riguarda la seconda condizione del teorema 23, si ponga $t^* = t + \gamma$, e quindi $t = t^* - \gamma$. Essendo inoltre $v(t, t_j) = v(t, t^*)\, v(t^*, t_j)$, i pesi ω_j che compaiono nella seconda condizione di immunizzazione possono essere scritti nel modo seguente:

$$\omega_j = \frac{y_j\, v(t, t_j)}{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t, t_j)} = \frac{v(t, t^*)\, v(t^*, t_j)}{v(t, t^*) \sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t^*, t_j)} = \tag{116}$$

$$= \frac{v(t^*, t_j)}{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t^*, t_j)} = \omega_j^*.$$

L'ugualianza $T - t = \sum_{j=1}^{m} \omega_j (t_j - t)$, con le dovute sostituzioni, diventa così

$$T - t^* + \gamma = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^* (t_j - t^* + \gamma) = \gamma + \sum_{j=1}^{n} \omega_j^* (t_j - t^*)$$

ovvero

$$T - t^* = \sum_{j=1}^{n} \omega_j (t_j - t^*) \tag{117}$$

relazione che riproduce, riferita all'istante t^*, la seconda condizione del teorema. In base alla (115) e alla (117) dunque l'immunizzazione permane anche in t^*.

E' poi facile provare che, pure in assenza di qualunque shock che possa perturbare il mercato, non appena giunge a scadenza una delle poste del flusso $\bar{y}$, cessano di valere le condizioni del teorema 23. Al lettore è lasciata la facile verifica.

Il corollario seguente riassume gli ultimi risultati.

Corollario 24 (Estensione della Immunizzazione) Se al tempo t valgono le condizioni di immunizzazione stabilite dal teorema di Fisher e Weil, allora il flusso $\bar{y}$ risulta immunizzato rispetto alla liability L fino a che non si verifica il primo shift additivo e comunque non oltre la data di scadenza della prima posta dell'attivo.

E' anche agevole (se pure non immediato) dimostrare che se la variazione della struttura non è del tipo ipotizzato, allora non è possibile immunizzare un portafoglio semplicemente imponendo le condizioni del teorema di Fisher e Weil.

8.2 La Duration.

La condizione di immunizzazione che si è appena illustrata, operante in condizioni di equilibrio finanziario e nell'ipotesi che il mercato sia perturbato da uno shift additivo, ha un interessante risvolto. Infatti il membro di destra della (113), media ponderata delle distanze temporali degli elementi del flusso dalla data iniziale, era una grandezza ben nota ai matematici finanziari fin dai primi anni del secolo precedente. Essa fu introdotta, con riferimento alla legge di capitalizzazione composta (e quindi si direbbe oggi in condizioni di flat yield curve), per individuare la scadenza media di un flusso, ipotetico istante nel quale si potevano considerare concentrati tutti gli importi. La terminologia anglosassone la definisce come duration e, come vedremo, essa è anche collegata alla variabiltà del prezzo di un bond.

Negli anni settanta la stessa duration, riformulata in funzione della struttura per scadenza, riemerge all'attenzione degli studiosi come strumento fondamentale nella soluzione dei problemi di immunizzazione finanziaria.

Definizione 25 (Duration) Dato un flusso $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ di importi dello stesso segno, esigibili in base allo scadenziario $\bar{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$, fissata una epoca di riferimento t e la struttura per scadenza v (t, s) vigente a quell'istante, si definisce duration (durata media finanziaria) la grandezza temporale:

$$D(t, \bar{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j \, v(t, t_j)\,(t_j - t)}{\sum_{j=1}^{m} y_j \, v(t, t_j)}. \tag{118}$$

Utilizzando la notazione esplicita di media ponderata

$$D(t, \bar{x}) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \,(t_j - t) \tag{119}$$

la duration è suscettibile di una utile interpretazione di tipo fisico. Infatti se si pensano i pesi ω_j quali masse normalizzate (cioè di somma unitaria) distribuite su di un asse con origine t, allora essa non è altro che il baricentro del sistema, ovvero il punto, facendo perno sul quale, l'ipotetico sistema di masse risulta in equilibrio. La duration dunque è assimilabile ad un momento primo baricentrale.

Osservazione 26 La lettura della duration come baricentro di masse consente di dare una interpretazione molto intuitiva delle condizioni poste dal teorema di Fisher e Weil per l'immunizzazione. Infatti la prima non è altro che una condizione di ugualianza delle masse, quella relativa agli incassi e quella relativa alla liability: il valore scontato dell'attivo e del passivo devono così avere lo stesso peso. La seconda indica che il baricentro delle masse che costituiscono l'attivo deve coincidere con il punto nel quale è idealmente collocata la massa che rappresenta il passivo. Ma il baricentro, per sua stessa definizione, è proprio il punto nel quale si può pensare collocata l'intera massa dell'attivo, così che risulta equivalente, dal punto di vista dell'equilibrio, avere gli importi attualizzati $\bar{y}_j \, v(t, t_j)$ collocati alle loro scadenze t_j oppure la loro somma $\sum_{j=1}^{m} y_j \, v(t, t_j)$

collocata in T. Grazie a questa equivalenza le poste in entrata vengono ad essere assimilate ad un unico importo trasformandole quindi in uno zcb. Uno zcb di valore attualizzato pari a quello della liability, e scadente allo stesso istante di quest'ultima, consente di far fronte alla medesima qualunque shift additivo colpisca la struttura per scadenza dei rendimenti. Di qui l'immunizzazione.

Una interessante proprietà della duration, collegata alla sua interpretazione come baricentro di masse, deriva direttamente dalla (117). Il membro di destra, per la sua analogia con quello della (119) non è altro che $D(t^*, \bar{y})$, per cui si ha la seguente catena di ugualianze:

$$T - t^* = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \, (t_j - t^*) = D(t^*, \bar{y})$$

$$T - t^* = T - t - (t^* - t) = D(t^*, \bar{y})$$

ma $T - t = D(t, \bar{y})$, per cui:

$$D(t^*, \bar{x}) = D(t, \bar{x}) - (t^* - t)\,. \qquad (120)$$

La (120) nella interpretazione baricentrale esprime il noto fatto che, se l'origine viene spostata in avanti (o indietro) della quantità $(t^* - t)$, purchè non sia $t^* > t_1$, di altrettanto si sposta il baricentro. Quello che è interessante osservare è che nel caso della duration, lo spostamento in avanti nel tempo pur alterando i fattori $v(t, t_j)$, lascia invariati i loro rapporti, come mostra la (116).

Sfruttando la proprietà definita dalla (120) è poi possibile studiare l'evoluzione della duration di un assgnato flusso, con il trascorrere del tempo. Il trascorrere del tempo equivale ad un progressivo spostamento della origine verso destra, ed essendo in questo caso $t^* > t$, per la (120) la duration diminuisce linearmente con il ridursi del tempo a scadenza.

Cosa accade alla duration all'istante nel quale il primo importo viene erogato? Mantenendo l'analogia con il sistema di masse, ciò equivale a togliere la prima massa depositata sull'asse, facendo con ciò uscire il sistema dall'equilibrio. L'asse si inclina verso destra e per riportarlo in equilibrio sarà necessario avanzare il perno, e quindi il baricentro dovrà essere spostato in avanti. Ma ciò, come visto, comporta un aumento della duration.

Questo ultimo risultato può essere ottenuto in forma rigorosa confrontando i valori della duration un istante prima ed un istante dopo il pagamento di un generico importo x_k. Indicando con $D\left(t_k^-, \bar{x}\right)$ e con $D\left(t_k^+, \bar{x}\right)$ i due valori si ha:

$$D\left(t_k^-, \bar{x}\right) = \frac{\sum_{j=k}^{m} x_j \, v\left(t_k^-, t_j\right)\left(t_j - t_k^-\right)}{\sum_{j=k}^{m} x_j \, v\left(t_k^-, t_j\right)} = \frac{\sum_{j=k+1}^{m} x_j \, v\left(t_k^-, t_j\right)(t_j - t_k)}{x_k + \sum_{j=k+1}^{m} x_j \, v\left(t_k^-, t_j\right)} \qquad (121)$$

poichè il primo termine del numeratore si annulla, essendo $t_k - t_k^- = 0$, ed al denominatore il primo termine si riduce a x_k poichè è $v(t_k^-, t_k) = 1$.

E' poi:

$$D(t_k^+, \bar{x}) = \frac{\sum_{j=k+1}^{m} x_j\, v(t_k^-, t_j)(t_j - t_k)}{\sum_{j=k+1}^{m} x_j\, v(t_k^-, t_j)}. \qquad (122)$$

La (122) ha lo stesso numeratore della (121) ma nella prima è minore il denominatore. Conseguentemente $D(t_k^+, \bar{x}) > D(t_k^-, \bar{x})$.

Così in corrispondenza degli istanti $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ la duration, vista come funzione del tempo, presenta discontinuità e diviene nulla alla scadenza t_m.

Riassumendo si può ora affermare che la duration decresce linearmente nei punti interni di ogni intervallo $[t_{k-1}, t_k]$, presentando discontinuità di prima specie agli estremi ove subisce un incremento di ammontare

$$a_k = \frac{\left[x_k \sum_{j=k+1}^{m} x_j\, v(t_k^-, t_j)(t_j - t_k)\right]}{\left[\sum_{j=k+1}^{m} x_j\, v(t_k^-, t_j)\right]\left[\sum_{j=k+1}^{m} x_j\, v(t_k^-, t_j) + x_k\right]}.$$

8.2.1 La Duration di Portafogli.

Si consideri ora il paniere fondamentale che costituisce il mercato al tempo t. Come di consueto i flussi dei titoli sono rappresentati come colonne della matrice X:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

mentre $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ è il vettore che rappresenta un generico portafoglio. Sia $\bar{y}$ il vettore del flusso generato dal portafoglio $\bar{\alpha}$:

$$\bar{y} = X\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} x_{1j}\,\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} x_{2j}\,\alpha_j \\ \ldots\ldots \\ \sum_{j=1}^{n} x_{mj}\,\alpha_j \end{pmatrix}$$

e sia

$$W(t, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^{m} y_i\, v(t, t_i)$$

il valore in t del portafoglio. Si indichi con

$$W(t,\bar{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)$$

il valore del j-mo titolo e con $D\left(t,\bar{x}_j\right)$ la duration dello stesso:

$$D\left(t,\bar{x}_j\right) = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)\,(t_i - t)}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)}. \tag{123}$$

Sia infine

$$D(t,\bar{\alpha}) = \frac{\sum_{i=1}^{m} y_i\, v(t,t_i)\,(t_i - t)}{\sum_{i=1}^{m} y_i\, v(t,t_i)}$$

la duration del portafoglio.

Questa può essere scritta anche nel modo seguente:

$$D(t,\bar{\alpha}) = \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,\alpha_j\, v(t,t_i)\,(t_i - t)}{\sum_{i=1}^{m} y_i\, v(t,t_i)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)\,(t_i - t)}{W(t,\bar{\alpha})}$$

Moltiplicando e dividendo per $W(t,\bar{x}_j)$ il numeratore del membro di destra

$$D(t,\bar{\alpha}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, W(t,\bar{x}_j)\, \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)(t_i - t)}{W(t,\bar{x}_j)}}{W(t,\bar{\alpha})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j\, W(t,\bar{x}_j)}{W(t,\bar{\alpha})} \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)\,(t_i - t)}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)}$$

e ricordando che è $D\left(t,\bar{x}_j\right) = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)(t_i - t)}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\, v(t,t_i)}$, ponendo $\beta_j = \frac{\alpha_j\, W(t,\bar{x}_j)}{W(t,\bar{\alpha})}$, si ha infine:

$$D(t,\bar{\alpha}) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, D\left(t,\bar{x}_j\right). \tag{124}$$

In conclusione la duration di un portafoglio è la media ponderata delle durations dei singoli titoli con pesi che sono il rapporto fra il valore scontato di ogni componente del portafoglio e il valore scontato dell'in tero portafoglio. Questa proprietà di linearità, come risulterà chiarito nel seguito, risulta di grande utilità pratica ogni qual volta si debba assegnare un indice che misuri la sensibilità del valore di un portafoglio nei confronti di variazioni delle condizioni di remunerazione del mercato.

8.3 Indicatori di Variabilità del Valore di un Flusso.

Quanto stabilito dal teorema di Fisher e Weil può essere riformulato ora in termini di duration: la condizione 2 del teorema infatti impone che, affinchè vi sia immunizzazione, la scadenza dell'impegno deve coincidere con la duration del flusso delle entrate.Con ciò si stabilisce un legame fra la duration stessa e quelle perturbazioni della struttura per scadenza che possono essere ricondotte a shifts additivi. Tale legame si manifesta anche in altro contesto, assai significativo per chi deve effettuare scelte di investimento, quello che porta a definire indicatori per sintetizzare il grado di reattività del valore di un titolo rispetto a variazioni nella struttura per scadenza dei rendimenti. I concetti di variabilità relativa, (semielasticità) e di convexity sono quelli più diffusi nella analisi della rischiosità degli investimenti in bonds, e di essi si tratterà nel presente paragrafo.

Posto ancora che all'istante t sia nota la struttura v (t, s) e posto che la perturbazione che può interessare i rendimenti a scadenza sia ancora uno shift additivo, si definisce la variabilità relativa (semielasticità) $E_{W_{t^+}}(\lambda, \overline{y})$ del valore di un flusso (o di un titolo) rispetto alla entità dello shift, come rapporto fra la derivata del valore fatta rispetto allo shift ed il valore stesso.

Definizione 27 (Semielasticità) Sia $W_{t^+}(\lambda, \overline{y})$ il valore in t^+ del flusso $\overline{y}$ nell'ipotesi che in t^+ si sia verificato uno shift additivo di ampiezza λ. Si definisce variazione relativa (semielasticità) la grandezza:

$$E_{W_{t^+}}(\lambda, \overline{y}) = \frac{1}{W_{t^+}(\lambda, \overline{y})} \frac{dW_{t^+}(\lambda, \overline{y})}{d\lambda}. \qquad (125)$$

Come si riconosce immediatamente dalla (125) l'appellativo di semielasticità deriva dal fatto che $E_{W_{t^+}}(\lambda, \overline{y})$, a meno di un fattore moltiplicativo rappresentato dal livello λ dello shift, è proprio una elasticità.

Infatti essendo la elasticità di una funzione f (x), calcolata rispetto alla variabile x, il prodotto di rapporti $\frac{df(x)}{dx}\frac{x}{f(x)}$ l'elasticità del valore rispetto allo shift sarebbe in questo caso proprio $\lambda E_{W_{t^+}}(\lambda, \overline{y})$.

Osservazione 28 Si noti che, così come è stata definita, la variabilità relativa non è altro che la derivata logaritmica del valore fatta rispetto al livello di shift:

$$E_{W_{t^+}}(\lambda, \overline{y}) = \frac{d \ln [W_{t^+}(\lambda, \overline{y})]}{d\lambda}.$$

Come si vedrà immediatamente la semielasticità è direttamente legata alla duration. Infatti, ricordando che è

$$W_{t^+}(\lambda, \overline{y}) = \sum_{j=1}^{n} y_j v\left(t^+, t_j\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j v(t, t_j)\, e^{-\lambda (t_j - t^+)}. \qquad (126)$$

ed anche

$$\frac{dW_{t^+}(\lambda, \overline{y})}{d\lambda} = -\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t, t_j)\, e^{-\lambda(t_j - t^+)} \left(t_j - t^+\right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} y_j\, v\left(t^+, t_j\right)\left(t_j - t^+\right)$$

si giunge alla relazione:

$$E_{W_{t^+}}(\lambda, \overline{y}) = -\frac{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t^+, t_j)\,(t_j - t^+)}{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t^+, t_j)} = -D\left(t^+, \overline{y}\right) \qquad (127)$$

che evidenzia proprio l'identità fra variazione relativa e duration. E' immediato, a partire da questa ultima relazioone, giustificare il ruolo privilegiato che l'informazione legata alla duration ha sempre avuto per gli operatori del mercato dei bonds.

Se nella (127) si si pone $\lambda = 0$, essendo in tal caso $W_{t^+}(0, \overline{y}) = W_t(\overline{y})$ e $D(t^+, \overline{y}) = D(t, \overline{y})$, allora si ottiene l'indice di variabilità relativa pre-shift del flusso $E_{W_t}(\overline{y})$:

$$E_{W_t}(\overline{y}) = -D(t, \overline{y})$$

La duration così è un primo indice sintetico che misura quanto sia reattivo il valore di un titolo agli shifts della struttura dei rendimenti.Andando a sostituire la (127) nella (125) si ottiene:

$$-D\left(t^+, \overline{y}\right) = \frac{1}{W_{t^+}(\lambda, \overline{y})} \frac{dW_{t^+}(\lambda, \overline{y})}{d\lambda}$$

da cui

$$dW_{t^+}(\lambda, \overline{y}) = -D\left(t^+, \overline{y}\right) W_{t^+}(\lambda, \overline{y})\, d\lambda$$

Utilizzando l'approssimazione del primo ordine (sostituendo i differenziali agli incrementi) si ha poi:

$$\Delta W_{t^+}(\lambda, \overline{y}) = -D\left(t^+, \overline{y}\right) W_{t^+}(\lambda, \overline{y})\, \Delta\lambda.$$

e ponendo ancora, nella relazione precedente, $\lambda = 0$, si giunge alla:

$$\Delta W_t(\overline{y}) = -D(t, \overline{y})\, W_t(\overline{y})\, \Delta\lambda \qquad (128)$$

relazione che indica come, in prima approssimazione, la variazione di valore che subisce ilvalore di un flusso per effetto di uno shift additivo sia ottenibile moltiplicando il valore stesso per la duration e per la variazione della struttura $\Delta\lambda$.

Osservazione 29 La (128) evidenzia anche che la variazione del valore ha segno opposto rispetto allo shift. Il valore, e quindi il prezzo di equilibrio, diminuisce se vi è un incremento nei rendimenti, mentre vi è un aumento di prezzo in presenza di riduzioni dei rendimenti.

Per introdurre la convexity è opportuno definire preliminarmente il momento di secondo ordine di un flusso.

Definizione 30 (Momento di Secondo Ordine) Dato un flusso di importi dello stesso segno $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ esigibili in base allo scadenziario $\bar{t} = (t_1, t_2, ..., t_m)$, fissata una epoca di riferimento t e la struttura per scadenza v (t, s) a quell'istante vigente, si definisce momento di secondo ordine la grandezza $D^{(2)}(t, \bar{y})$ così definita:

$$D^{(2)}(t, \bar{y}) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t, t_j)\,(t_j - t)^2}{\sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t, t_j)} \tag{129}$$

ovvero, utilizzando la sostituzione (111):

$$D^{(2)}(t, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j\,(t_j - t)^2 . \tag{130}$$

Come illustra chiaramente la (130) l'indice appena introdotto ha il carattere di momento secondo e, riferendosi ancora al modello delle masse distribuite su di un asse, si tratta proprio del momento secondo della distribuzione (un analogo in statistica è la varianza) inteso come momento inerziale del sistema.

Indicando ora con $C_{W_{t^+}}(\lambda, \bar{y})$ la convexity del flusso $\bar{y}$ in presenza, al tempo t^+, di uno shift additivo di entità λ, si dà la definizione seguente.

Definizione 31 (Convexity) Sia $W_{t^+}(\lambda, \bar{y})$ il valore in t^+ del flusso $\bar{y}$ nella ipotesi che in t^+ si sia verificato uno shift additivo di ampiezza λ. Si definisce convexity la grandezza:

$$C_{W_{t^+}}(\lambda, \bar{y}) = \frac{1}{W_{t^+}(\lambda, \bar{y})} \frac{d^2 W_{t^+}(\lambda, \bar{y})}{d\lambda^2} \tag{131}$$

Sostituendo alla derivata seconda la sua espressione

$$\frac{d^2 W_{t^+}(\lambda, \bar{y})}{d\lambda^2} = \sum_{j=1}^{m} y_j\, v(t, t_j)\, e^{-\lambda (t_j - t^+)} \left(t_j - t^+\right)^2 = \sum_{j=1}^{m} y_j\, v\left(t^+, t_j\right) \left(t_j - t^+\right)^2$$

e ricordando che è $W_{t^+}(\lambda, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{m} y_j v(t^+, t_j)$ si giunge alla:

$$C_{W_{t^+}}(\lambda, \bar{x}) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j v(t^+, t_j)(t_j - t^+)^2}{\sum_{j=1}^{m} y_j v(t^+, t_j)} = D^{(2)}\left(t^+, \bar{x}\right). \qquad (132)$$

La convexity coincide dunque con il momento di secondo ordine, ed anche in questo caso, ponendo $\lambda = 0$, si ottiene:

$$C_{W_t}(\bar{x}) = D^{(2)}(t, \bar{x}). \qquad (133)$$

Il significato operativo della convexity è meno immediato di quello della semielasticità. Esso integra l'informazione fornita dalla semielasticità, nel senso che fra due flussi che hanno la medesima duration, quello che ha maggiore momento del secondo ordine risulta più sensibile alle variazioni di struttura dell'altro. La convexity interviene poi in altri schemi immunizzativi ai quali però qui non si farà menzione.

Esempio 32 Si consideri un mercato caratterizzato da una struttura piatta dei rendimenti, con rendimenti a scadenza $h(t, s) = \delta$. Si noti che per quanto poco realistico sia questo contesto, in certi periodi la curva dei rendimenti a scadenza si presenta così poco inclinata da rendere accettabile una sua approssimazione con una costante. Si vogliano definire, con riferimento a questa situazione, le grandezze viste più sopra: duration, semielasticità e convexity. Per quanto concerne la duration, applicando la (118) con $v(t, s) = e^{-\delta(s-t)}$ si ottiene:

$$D(t, \bar{y}) = \frac{\sum_{j=1}^{m} y_j e^{-\delta(t_j - t)}(t_j - t)}{\sum_{j=1}^{m} y_j e^{-\delta(t_j - t)}}.$$

Uno shift additivo in questo caso si traduce in una traslazione verso il basso o verso l'alto della retta orizzontale che rappresenta la struttura dei rendimenti: $h(t^+, s) = \delta + \lambda$, da cui $v(t^+, s) = e^{-(\delta+\lambda)(s-t)}$. E' così:

$$W_{t^+}(\lambda, \bar{y}) = \sum_{j=1}^{m} y_j e^{-\delta(t_j - t^+)} e^{-\lambda(t_j - t^+)}$$

$$\frac{dW_{t^+}(\lambda, \bar{y})}{d\lambda} = -\sum_{j=1}^{m} y_j e^{-\delta(t_j - t^+)} e^{-\lambda(t_j - t^+)}\left(t_j - t^+\right)$$

e quindi, ponendo ancora $\lambda = 0$, si ottiene la semielasticità:

$$E_{W_t}(\bar{y}) = -\frac{\sum_{j=1}^{m} y_j e^{-\delta(t_j - t)}(t_j - t)}{\sum_{j=1}^{m} y_j e^{-\delta(t_j - t)}} = -D(t, \bar{y}).$$

Effettuando calcoli analoghi, si ottiene la convexity:

$$C_{W_t}(\overline{y}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j e^{-\delta(t_j - t)} (t_j - t)^2}{\sum_{j=1}^{n} y_j e^{-\delta(t_j - t)}} = D^2(t, \overline{y}) .$$

L'avere esteso, nel precedente paragrafo, la definizione di duration a portafogli di titoli consente di trasferire a questi anche il concetto di variabilità relativa. Seguendo lo schema dimostrativo utilizzato per la duration, si prova facilmente che anche il momento di secondo ordine di un portafoglio è ottenibile come media ponderata degli analoghi momenti dei titoli che lo compongono ed i pesi che intervengono nel calcolo sono gli stessi già utilizzati per la duration.

8.4 Aspetti Applicativi della Immunizzazione Finanziaria.

Dopo avere delineato l'ambito di applicabilità della strategia di immunizzazione finanziaria, esplicitando le condizioni di bilancio e di duration che ne garantiscono la realizzazione, restano da studiare le modalità con le quali, nella realtà dei mercati, l'immunizzazione può essere resa effettiva. Tornando ancora al teorema 23, appare evidente che questo non fornisce esplicitamente alcunun ambito applicativo, definendo unicamente le condizioni che devono essere verificate ogni qual volta si intende coprire un futuro inpegno tramite un flusso di entrate. Dato il flusso in entrata, sfruttando le condizioni di immunizzazione, potrebbe essere determinata l'epoca T alla quale dare scadenza all'impegno, ma nel fare ciò si invertirebbe la logica del problema poichè, in generale, l'impegno rappresenta il lato non modificabile del problema, essendo fissati sia il suo ammontare che la sua scadenza. Un intermediario finanziario che fronteggi situazioni di copertura di futuri inpegni, usualmente considera il flusso delle entrate quale variabile sulla quale intervenire, ed il suo intervento si traduce nella costruzione di opportuni portafogli che generino le entrate in grado di soddisfare le condizioni di Fisher e Weil.

Il problema può dunque essere posto nei seguenti termini. A partre dal consueto paniere fondamentale, individuare il portafoglio $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tale che, nell'ipotesi di shift additivo nella struttura dei rendimenti, risulti immunizzato l'impegno di ammontare L scadente in T .

Essendo $\overline{y} = X\overline{\alpha}$ il flusso generato dal portafoglio, e supposta nota in t la struttura v (t, s), dovranno essere verificate le equazioni:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \, v(t, t_j) = L v(t, T)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j (t_j - t) = T - t$$

le quali, sostuendo a y_j e a ω_j le loro espressioni in funzione delle componenti di $\overline{\alpha}$:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{ij}$$

$$\omega_j = \frac{y_j v(t, t_j)}{\sum_{j=1}^{m} y_j v(t, t_j)}$$

diventano le equazioni:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} v(t, t_j) = Lv(t, T) \qquad (134)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} v(t, t_j)(t_j - t) = Lv(t, T)(T - t)$$

Effettuando poi le sostituzioni:

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} v(t, t_j)$$

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} v(t, t_j)(t_j - t)$$

$$z = Lv(t, T)$$

$$r = Lv(t, T)(T - t)$$

il portafoglio immunizzato lo si ottiene risolvendo il sistema lineare di due equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = z \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i = r \end{cases} \qquad (135)$$

Il sistema rappresentato dalla (135), salvo casi degeneri privi di concreto significato, ammette ∞^{n-2} soluzioni (n − 2 gradi di libertà). Ciò significa che n − 2 delle componenti possono essere fissate ad arbitrio, e se queste sono poste tutte uguali a zero, il portafoglio immunizzante conterrà solo due titoli.

Un aspetto da tenere presente nel risolvere problemi di immunizzazione è che la soluzione deve essere a componenti non negative. Infatti una componente negativa starebbe a significare che il tittolo corrispondente è detenuto in posizione short, e poichè assumere posizioni short significa incassare il prezzo della attività impegnandosi ad effettuare i pagamenti futuri di cedole e capitale, con una soluzione negativa si andrebbero ad aggiungere ulteriori inpegni a quello originario per coprire il quale il portafoglio è costruito. Agire in questo modo, oltre che complicato, sarebbe irragionevole e dunque ha senso il vincolo sui segni della soluzione.

Se si decide di utilizzare due soli titoli, una strategia risolutiva che in condizioni normali (normalità intesa nel senso che i titoli trattati hanno valore di rimborso di ammontare molto più elevato di quello delle cedole) garantisce il rispetto del vincolo sui segni è quella di sceglierli con scadenze rispetto alle quali T sia intermedia.

Una diversa via risolutiva è quella di lasciare libero il numero di titoli da utilizzare, affiancando al sistema (135) l'insieme dei vincoli di non negatività: $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$. Questo modo di operare complica la procedura risolutiva, ed in genere saranno necessari specifici algoritmi (o programmi più sofisticati come MAPLE V) per individuare la soluzione.

Nella pratica le configurazioni che il problema della immunizzazione può assumere sono molteplici, ciascuna dipendente dai vincoli effettivi che la situazione stessa presenta.

Così, ad esempio, se qualche titolo è già in portafoglio nella quantità k_i, si dovranno porre vincoli del tipo $\alpha_i = k_i$ se non si vuole (o non si può) inserire nel portafoglio altre unità di quel titolo. Se poi chi si trova nella posizione di costruire il portafoglio immunizzato è un intermediario istituzionale, allora potrebbe essere vincolato da norme di legge, o da regole di statuto, per cui non può detenere titoli dello stesso tipo oltre un ammontare definito, e/o al di sotto di una certa soglia quantitativa.

I vincoli in questi casi assumerebbero la forma $h_i \leq \alpha_i \leq l_i$.

In tutti questi casi le procedure risolutive si complicano leggermente, non essendo più sufficienti i semplici metodi dell'algebra lineare.

Un caso di rilevante interesse applicativo è quello nel quale al problema di immunizzazione è abbinato un problema di ottimo.

Questa situazione può presentarsi se l'operatore che intende dare corso alla procedura immunizzativa ha limitate disponibilità finanziarie con le quali mettere in atto l'immunizzazione. In questo caso sarà necessario individuare, fra tutti i portafogli possibili, il portafoglio a minimo costo.

Alternativamente il problema potrebbe porsi nei termini seguenti: data una disponibilità liquida attuale di ammontare K ed un impegno futuro, esiste un portafoglio immunizzato rispetto all'impegno, costruibile utilizzando la disponibilità di K senza incrementare ulteriormente l'esposizione?

La struttura analitica del problema per tutti questi casi, posto che al tempo t sia $\overline{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$ il vettore dei prezzi dei titoli del paniere, è la seguente:

$$\begin{cases} \min_{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i = z \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i = r \\ \alpha_1 \geq 0, .., \alpha_n \geq 0 \end{cases} \tag{136}$$

Si riconosce nella formulazione della (136) un classico problema di programmazione lineare (PL) la cui soluzione, se esiste, è individuabile tramite una tecnica iterativa detta metodo del simplesso. Anche per questa tipologia di problemi esiste nel programma MAPLE V un idoneo algoritmo risolutivo (si veda nella libreria SIMPLEX).

Ovviamente anche nella ricerca del portafoglio immunizzato di minimo costo possono essere inseriti vincoli di vario, tipo quali limiti superiori o inferiori per le variabili α_i, o imporre specifici valori per alcune di esse. Si tenga tuttavia presente che all'aumentare dei vincoli si riduce l'insieme delle soluzioni ammissibili, così che in alcuni casi questo insieme può ridursi a quello vuoto.

L'esempio che segue illustra le fasi risolutive di un problema di immunizzazione finanziaria.

Esempio 33 Alla data del 17 maggio 2001 viene costruita una funzione per definire la struttura per scadenza continua dei prezzi (metodo polinomiale) a partre dai dati rilevati per i diciotto BTP riassunti nella tabella seguente:

Scadenza	Cedola	Prezzo	Scadenza	Cedola	Prezzo
01/07/01	8.25	103.5834	15/07/04	4	99.6233
01/09/01	12	104.2239	01/04/05	10.5	121.1731
01/01/02	6.25	103.4944	01/09/05	10.5	124.0197
15/04/02	3	99.1233	01/02/06	9.5	122.1067
01/09/02	12	111.5639	01/07/06	8.75	120.5181
01/02/03	12	115.9340	01/07/07	6.75	111.5591
01/06/03	11	117.4278	01/11/07	6	105.4024
01/10/03	4	99.4674	01/05/08	5	99.6353
01/02/04	3.5	97.6476	01/05/09	4.5	95.4868

TABELLA 16

Ponendo uguale a zero l'istante iniziale, la funzione di attualizzazine ottenuta è il polinomio di terzo grado:

$$v(\tau) = 1 - 0.04215153881\tau - 0.0004574678\tau^2 + 0.00004897440366\tau^3 \tag{137}$$

avendo indicato con τ il tempo, misurato in unità di anno) che intercorre dalla data di riferimento (17 maggio 2001). Sia L = 10.000 l'impegno in uscita con scadenza 17 maggio 2004. E' intanto T = 3.

Il paniere dei titoli che si intendono utilizzare per l'immunizzazione sono i cinque BTP riportati nella tabella seguente

Scadenza	Cedola	Prezzo
15/02/02	3	99. 776
01/08/03	5	114. 26
01/01/04	4.25	112. 81
01/01/05	4.75	118. 99
01/02/07	3. 375	110. 65

TABELLA 17

Lo scadenziario completo, in unità di anno, relativo ai cinque titoli è rappresentato nel seguente vettore:

$$\text{Scad} = \begin{matrix} 0.12, 0.20, 0.24, 0.62, 0.70, 0.74, 1.12, 1.20, 1.62, 1.70, 2.12, \\ 2.20, 2.62, 2.70, 3.12, 3.20, 3.62, 3.70, 4.20, 4.70, 5.20, 5.70 \end{matrix}$$

I valori z_i sono i seguenti:

$$z_1 = 102.7128905$$
$$z_2 = 114.2448725$$
$$z_3 = 112.7222272$$
$$z_4 = 119.3076425$$
$$z_5 = 110.7116436$$

Si tenga presente che questi valori, come indica la relazione $z_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, v(t, t_j)$ in base alla quale sono stati calcolati, non sono altro che i prezzi di equilibrio ottenuti in base alla struttura per scadenza stimata $v(\tau)$. Come si vede confrontando iquesti prezzi con quelli effettivi riportati nella terza colonna della tabella 17, i valori d'equilibrio (con l'eccezione delprimo) sono molto prossimi a quelli reali, a conferma della bontà della stima di $v(\tau)$. I valori r_i sono poi i seguenti:

$$r_1 = 74.97953620$$
$$r_2 = 227.7243024$$
$$r_3 = 264.7799844$$
$$r_4 = 368.8515509$$
$$r_5 = 529.2577444$$

ed, infine, è $z = 8707.504822$ e $r = 26122.51447$. Il portafoglio in grado di immunizzare la liability di 10000 è una delle soluzioni delsistema:

$$\begin{cases} 102.712\alpha_1 + 114.244\alpha_2 + 112.722\alpha_3 + 119.307\alpha_4 + 110.711\alpha_5 = 8707.504 \\ 74.979\alpha_1 + 227.724\alpha_2 + 264.779\alpha_3 + 368.851\alpha_4 + 529.2577\alpha_5 = 26122.514 \end{cases}$$

Se si pone, ad esempio, che già si detengano 30 unità del quinto titolo, allora ponendo $\alpha_5 = 30$, una delle ∞^2 soluzioni del sistema è:

$$\alpha_1 = 3.78736,\ \alpha_2 = 43.74064,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0,\ \alpha_5 = 30.$$

Si supponga ora che un mese dopo la costituzione del portafoglio, il 17 giugno 2001, la struttura dei rendimenti subisca uno shift additivo di entità $\lambda = 0.01$. La nuova funzione di attualizzazione $v\left(\frac{1}{12}, \theta\right)$, in assenza di variazioni della struttura fino al 17 giugno 2001, coincide con quella forward implicita nei prezzi del 17 maggio. Indicando poi con τ la nuova variabile temporale (essendo $\theta = \tau - \frac{1}{12}$), è quindi:

$$v\left(\frac{1}{12}, \theta\right) = v\left(0, \frac{1}{12}, \theta\right) = \frac{v(0, \theta)}{v\left(0, \frac{1}{12}\right)}$$

e ricordando la (100), essendo poi

$$v\left(0, \frac{1}{12}\right) = 1 - 0.04215153881\left(\frac{1}{12}\right) - 0.00045746781\left(\frac{1}{12}\right)^2 + 0.00004897440366\left(\frac{1}{12}\right)^3 =$$
$$= 0.996\,48$$

la nuova funzione di attualizzazione $v^*(\theta) = v\left(\frac{1}{12}, \theta\right)$ diventa:

$$\begin{aligned} v^*(\theta) &= \frac{v(\tau)}{0.996\,48} e^{-0.01\tau} = \\ &= \frac{1 - 0.04215153881\,\theta - 0.00045746781\,\theta^2 + 0.00004897440366\,\theta^3}{0.996\,48} e^{-0.01\theta}. \end{aligned}$$

Il nuovo scadenziario è ora il seguente:

$$\text{Scad} = \left\{ \begin{array}{l} 0.03, 0.12, 0.16, 0.53, 0.62, 0.66, 1.03, 1.12, 1.53, 1.62, 2.03, \\ 2.12, 2.53, 2.62, 3.03, 3.12, 3.53, 3.6, 4.12, 4.62, 5.12, 5.62 \end{array} \right\}$$

Alle nuove condizioni di struttura il valore di equilibrio dei BTP è poi:

$$\begin{aligned} z_1^* &= 102.0500965 \\ z_2^* &= 113.5076640 \\ z_3^* &= 111.9948441 \\ z_4^* &= 118.5377646 \\ z_5^* &= 109.9972346 \end{aligned}$$

con un valore di portafoglio:

$$\begin{aligned} W(t^*, \overline{\alpha}) &= 102.050\,\alpha_1 + 113.507\,\alpha_2 + 111.994\,\alpha_3 + 118.537\,\alpha_4 + 109.997\,\alpha_5 = \\ &= 3.787\,(102.050) + 43.740\,(113.507) + 30\,(109.997) = 8751.205976. \end{aligned}$$

La libility, alla data del 17 giugno 2001, ha valore:

$$W(t^*, L) = 10000\, v^*(2.9167) = 8701.377852.$$

E' dunque $W(t^*, \overline{\alpha}) = 8751.205976 > 8701.377852 = W(t^*, L)$ come richiesto dalle condizioni di immunizzazione.

E' utile sottolineare il fatto che, se la struttura v (t, s) la si ottiene attraverso un paniere di titoli scelto fra i BTP del mercato, i titoli che entreranno a fare parte del portafoglio immunizzato è bene non appartengano tutti al paniere impiegato per ricavare la struttura.

Si noti ancora che l'immunizzazione delineata del teorema 23 e dalla sua estensione mediante il corollario 24, garantisce che il valore pest shift dell'attivo sia minore del valore della liability allo stesso istante, come ha evidenziato anche l'esempio precedente.

Naturalmente se fino alla scadenza T dell'impegno non intervengono altre perturbazioni, la condizione di immunizzazione $W(t^*, \overline{\alpha}) \geq W(t^*, L)$ si mantiene fino a T quando sarà $W(\overline{T}, \alpha) \geq L$. Quindi se le condizioni di mercato, dopo il primo shift, non dovessero subire più variazione alcuna, il portafoglio immunizzato costruito all'istante iniziale t può essere conservato fino alla scadenza. In realtà, non potendosi escludere ulteriori perturbazioni dopo la prima, le condizioni di immunizzazione cessano di operare non appena lo shift si è manifestato, ovvero alla scadenza della prima posta. Per mantere l'immunizzazione occorrerà dare corso ad una strategia dinamica di immunizzazione ricalibrando il portafoglio , in base alle nuove condizioni, appena lo shift si presenta, ovvero alla scadenza di ogni posta. Questa strategia dinamica può essere abbastanza laboriosa e certamente onerosa (per i costi di transizione che si devono affrontare ogni volta che si effettuano acquisti o vendite di titoli), spece nei casi nei quali la frequenza di intervento è elevata. D'altro canto evitare di ricalibrare il portafoglio ogni volta che le condizioni del teorema di Fishe e Weil non valgono più comporta l'esposizione al rischio di tasso, ed in genere è demandato alla sensibilità del gestore lo stabilire il trade-off fra costi e rischio evitando pericolose esposizioni ed al contempo tenendo i costi operazionali sotto una soglia accettabile.

Con riferimento all'esempio precedente, si illustra ora come può essere modificato il portafoglio un mese dopo la sua costruzione, immediatamente dopo che lo shift si è prodotto.

Esempio 34 Si riprenda l'esempio precedente, ponendoci al giorno 17 giugno 2001, non appena si è verificata la variazione nella strututra per scadenza. Come si è visto, a quell'istante vi è ancora immunizzazione ma per essere garantiti nel caso di un ulteriore futuro shift additivo è necessario ricalibrare il portafoglio ripristinando le condizioni del teorema di Fisher e Weil. Le nuove condizioni di bilancio e di duration diventano così:

$$\begin{cases} 102.425\alpha_1 + 112.527\alpha_2 + 110.643\alpha_3 + 116.262\alpha_4 + 106.123\alpha_5 = 8492.470 \\ 66.227\alpha_1 + 214.619\alpha_2 + 250.206\alpha_3 + 348.528\alpha_4 + 495.565\alpha_5 = 25350.477 \end{cases}$$

e una soluzione, sempre sotto condizione di mantenere in portafoglio le 30 unità del quinto titolo, è data dal portafoglio seguente:

$$\alpha_1 = 30.43407, \alpha_2 = 7.043670, \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 = 10, \ \alpha_5 = 30$$

in questo caso sarà necessario acquistare $30.43407 - 3.78736 = 26.647$ unità del primo BTP, vendere $43.74064 - 7.043670 = 36.697$ unità del secondo BTP e acquistare dieci unità del terzo BTP. Se, per contenere le modifiche da apportare al portafoglio, avessimo imposto anche di conservare le 43.74064 unità del secondo BTP, allora la soluzione sarebbe:

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 43.74064, \alpha_3 = 0.767978, \alpha_4 = 2.59224, \alpha_5 = 30$$

che rispetto a quella originaria richiede solo l'acquisto di 0.767978 unità del terzo BTP, 2.59224 del quarto e la vendita di 3.78736 unità del primo.

Gli esempi svolti, ed in particolare l'ulimo, hanno mostrato come alla fine la scelta del portafoglio sia relativamente arbitraria, potendo sceglierne uno fra gli infiniti che garantiscono l'immunizzazione, osservando gli unici vincoli della non negatività delle componenti e quelli eventuali derivanti dal possedere già definite quantità di alcuni dei titoli. Facendo sempre riferimento all'ultimo esempio si è visto che, specie in fase di revisione del portafoglio, le soluzioni che si ottengono possono differire notevolmente una dall'altra. Una via per fare dipendere il risultato esclusivamente dal calcolo, eliminando ogni arbitrarietà, è quella già menzionata che passa attraverso un problema di ottimizzazione. Ancora con riferimento ai dati dell'esempio 33 si imposta ora il problema della scelta del portafoglio immunizzato di minimo costo.

Esempio 35 Si assumano ancora i datio dell'esempio 33 e si torni alla data di costruzione delportafoglio, il 17 maggio 2001.Noti anche i prezzi dei BTP che si intendono utilizzare, restando invariati i due vincoli di bilancio e di duration, il problema di PL assume così la forma:

$$\begin{cases} \min\limits_{\overline{\alpha}} \ (99.776\alpha_1 + 114.26\alpha_2 + 112.81\alpha_3 + 118.99\alpha_4 + 110.65\alpha_5) \\ 102.712\alpha_1 + 114.244\alpha_2 + 112.722\alpha_3 + 119.307\alpha_4 + 110.711\alpha_5 = 8764.408 \\ 74.979\alpha_1 + 227.724\alpha_2 + 264.779\alpha_3 + 368.851\alpha_4 + 110.711\alpha_5 = 25148.593 \\ \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \geq 0, \alpha_4 \geq 0, \alpha_5 \geq 0 \end{cases}$$

Utilizzando la libreria SIMPLEX di MAPLE V si ottiene la soluzione:

$$\alpha_1 = 37.26508, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 44.07757$$

il cui costo è pari a 8595.344250. Se si pone ancora il vincolo $\alpha_5 = 30$, supponendo che il quinto BTP debba comunque essere acquistato sul mercato, la soluzione diventa:

$$\alpha_1 = 26.41348750, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 22.40552079, \alpha_5 = 30$$

con un costo del portafoglio di 8620.965048, ovviamente più alto del costo del portafoglio ottimale.

9 Complementi.

9.1 Ammortamenti e loro Valutazione.

In relazione alle procedure di ammortamento di prestiti sorgono alcune questioni di natura pratica alle quali è utile fare cenno e che possono riassumersi nei seguenti argomenti:

a) preferenza fra una procedura di ammortamento rispetto ad un'altra;

b) rivalutazione dei prestiti a nuove condizioni di tasso in seguito a loro cessione o rimborso anticipato;

I prossimi paragrafi saranno dedicati all'analisi di queste tematiche.

9.1.1 Scelta fra Diverse Modalità di Ammortamento.

Stabilito che un debito di ammontare S verrà estinto con n versamenti periodici in base ad un certo tasso tecnico i (il quale, se il prestito è emesso alla pari, costituisce anche il T IR dell'operazione) le diverse modalità di rimborso quali rata costante, quota capitale costante, o altro sono, da un punto di vista strettamente finanziario, fra loro equivalenti. Questa "equivalenza finanziaria" è l'espressione della equità della operazione stessa per la quale, una volta fissato il tasso, in regime di capitalizzazione composta, il suo valore risulterà nullo indipendentemente da quale sia la modalità di estinzione adottata. In base alla sola equità dunque, scegliere una procedura di ammortamento od un'altra, sembrerebbe essere pura questione di gusto personale non alterando il fondamentale parametro di giudizio rappresentato dal tasso effettivo. Tuttavia dalla equivalenza in senso finanziario non discende necessariamente l' indifferenza del mutuatario per una forma di rimborso o l'altra.

Così, ad esempio, un ammortamento a rimborso unico del capitale a scadenza, accompagnato da pagamento periodico degli interessi, presume la possibilità di affrontare l'ingente rimborso finale in cambio di rate periodiche morbide. Rimborsi graduali invece distribuiscono l'impegno lungo la vita del prestito in modo più equilibrato e questo spiega il perchè sono decisamente più diffusi. Anche nell'ambito dei rimborsi graduali aspetti peculiari quali la decrescenza della rata o la sua costanza possono spingere il mututatario a preferire un tipo all'altro. Se si prevede che i risultati dell'investimento per il quale il mutuo è stato acceso inizieranno a prodursi dopo un certo periodo di tempo, allora un rimborso a quota capitale costante può non essere ottimale dato che le rate decrescono in progressione aritmetica e sono più elevate proprio nei periodi nei quali l'investimento non è ancora produttivo. In casi come questo può rivelarsi particolarmente adatta la prassi di far precedere l'ammortamento vero e proprio da una fase di preammortamento nella quale non si rimborsano quote di capitale ma si pagano solo gli interessi annuali. Il preammortamento serve dunque a creare una maggiore sincronia fra le entrate generate dall'investimento ed i costi sosenuti per la sua messa in essere.

La scelta fra una modalità o l'altra di rimborso può dipendere infine da considerazioni di natura fiscale: dall'esigenza di fare coincidere ammortamento finanziario e ammortamento fiscale dell'impianto o, viceversa, di renderli quanto più diversi possibile (strategie di questo tipo dipendono in genere dalla politica dei dividendi). Si ricordi a questo proposito che le quote interesse sono componenti di costo e come tali partecipano alla formazione del reddito di esercizio mentre le quote capitale attengono alla situazione patrimoniale dell'azienda e non hanno effetti diretti sul reddito di esercizio e quindi sui dividendi.

In conclusione, a parità di condizioni di costo, espresse dal tasso effettivo, è la situazione finanziaria dell'azienda a suggerire la procedura che meglio si adatta alle esigenze dell'impresa e pertanto l'equivalenza finanziaria espressa dall'indice di costo (il TIR dell'operazione) è solo un primo elemento economico del quale tenere conto.

9.1.2 La Valutazione dei Prestiti.

Nel corso della vita di un prestito il creditore può avere la convenienza (o la necessità) di negoziare il prestito medesimo cedendo ad altri il credito residuo, ovvero può essere il mutuatario, qualora le condizioni contrattuali lo consentano, ad esercitare il diritto ad una estinzione anticipata (strategia conveniente in periodi di calo dei tassi: si estingue il mutuo divenuto oneroso e se ne accende uno nuovo alle condizioni più favorevoli). In ambedue questi casi si presenta il problema di calcolare quale sia il valore di cessione o di estinzione. Poichè le condizioni di tasso originariamente pattuite per la operazione difficilmente potranno essere mantenute anche nella valutazione successiva occorre introdurre nel calcolo un nuovo tasso in base alquale verrà ridefinita l'equità della operazione di cessione o di estinzione anticipata.

Si indichi con τ il tempo al quale la valutazione viene effettuata con i^* il nuovo tasso di valutazione diverso, in genere, dal tasso tecnico i dell'operazione originaria, e con R_j la generica data. Si definisce valore delprestito al tempo τ in base al tasso di valutazione i^* il valore attuale $V^*(\tau)$ delle rate ancora da corrispondere:

$$V^*(\tau) = \sum_{t_j > \tau} R_j \, (1 + i^*)^{-(t_j - \tau)} \,. \tag{138}$$

In molti contesti interessa determinare, non solo il valore di cessione o di estinzione, ma anche una particolare scomposizione di tale valore. Così se si intende cedere separatamente le future quote capitale e le future quote interesse è necessario valutare ognuna delle due componenti. Si tratterebbe, in questo caso di una sorta di operazione di "stripping" motivata, ad esempio, dal fatto che in una procedura successoria la titolarità delle quote capitale spetta ad un soggeto diverso da quello titolare delle quote interesse (i frutti). Tale separazione perta ad introdurre i concetti di nuda proprietà e di usufrutto.

Si definisce pertanto la nuda prorietà $P^*(\tau)$, valutata al tempo τ, il valore attualizzato al tasso i^* delle future quote capitale, mentre si definisce l'usufrutto $U^*(\tau)$ il valore attualizato allo steso tasso delle future quote interesse. In simboli:

$$P^*(\tau) = \sum_{t_j > \tau} C_j \, (1 + i^*)^{-(t_j - \tau)} \tag{139}$$

$$U^*(\tau) = \sum_{t_j > \tau} I_j \, (1 + i^*)^{-(t_j - \tau)} \,. \tag{140}$$

Per ottenere forme più sintetiche della (139) e della (140) conviene considerare il caso in cui l'epoca di valutazione τ coincide con l'istante immediatamente successivo a quello di pagamento di una rata: $r^+ = \lim_{h \to 0^+} (r + h)$ dove r è l'istante di pagamento di una rata. Una volta effettuate le valutazioni in r^+ (d'ora in poi semplicemente r), sarà immediato spostare le stesse ad un istante intermedio sfrutando la proprietà di scindibilità della legge di capitalizzazione composta. Scomponendo in nuda proprietà ed usufrutto si ha:

$$
\begin{aligned}
V^*(r) &= \sum_{j=1}^{n-r} R_{r+j} \, (1+i^*)^{-j} = \\
&= \sum_{j=1}^{n-r} C_{r+j} \, (1+i^*)^{-j} + \sum_{j=1}^{n-r} I_{r+j} \, (1+i^*)^{-j} = \\
&= P^*(r) + U^*(r)
\end{aligned}
\tag{141}
$$

Essendo l'usufrutto il valore attuale delle future quote interesse e poichè queste ultime sono esprimibili come l'interesse sul debito residuo dell'anno precedente: $I_k = iD_{k-1}$, e ricordando inoltre che il debito residuo non è altro che la somma delle future quote capitale, si ha:

$$
\begin{aligned}
U^*(r) &= \sum_{j=1}^{n-r} I_{r+j} \, (1+i^*)^{-j} = \sum_{j=1}^{n-r} iD_{r+j-1} \, (1+i^*)^{-j} = \\
&= \sum_{j=1}^{n-r} i \, [C_{r+j} + C_{r+j+1} + \ldots + C_n] \, (1+i^*)^{-j} = \\
&= i \, [C_{r+1} + C_{r+2} + C_{r+3} + \ldots + C_n] \, (1+i^*)^{-1} + \\
&\quad + i \, [C_{r+2} + C_{r+23} + \ldots + C_n] \, (1+i^*)^{-2} + \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + iC_n \, (1+i^*)^{-(n-r)}
\end{aligned}
$$

e riordinando i termini si giunge alla:

$$
\begin{aligned}
U^*(r) = \; & iC_{r+1} (1+i^*)^{-1} + \\
& + iC_{r+2} \left[(1+i^*)^{-1} + (1+i^*)^{-2} \right] + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + iC_n \left[(1+i^*)^{-1} + (1+i^*)^{-2} + \ldots + (1+i^*)^{-(n-r)} \right]
\end{aligned}
$$

ed infine, ricordando che i termini in parentesi non sono altro che la somma di fattori di sconto $v_*^k = (1+i^*)^{-k}$, si ha:

$$
\begin{aligned}
U^*(r) &= i \sum_{j=1}^{n-r} C_{r+j} \, \frac{1-(1+i^*)^{-j}}{i^*} = \\
&= \frac{i}{i^*} \sum_{j=1}^{n-r} C_{r+j} - \frac{i}{i^*} \sum_{j=1}^{n-r} C_{r+j} \, (1+i^*)^{-j} = \\
&= \frac{i}{i^*} \, [D_r - P^*(r)] \, .
\end{aligned}
\tag{142}
$$

dove D_r è il debito residuo all'epoca r, somma delle future quote capitale. In definitiva la (142) consente di esprimere l'usufrutto in funzione della nuda proprietà, del debito residuo e dei due tassi: quello tecnico i e quello di valutazione i^*. Si noti che il fattore in parentesi quadra risulta essere sempre positivo poichè è la differenza fra la somma delle future quote capitale (debito residuo) e la somma delle stesse attualizzate al tasso i^* (nuda proprietà). L'utilità pratica della (142) sta nel fatto che l'usufrutto è, qualunque sia il tipo di ammortamento, di più complessa forma dovendosi attualizzare quote interesse che sono sempre di importo variabile (decrescenti) nei vari anni. Il debito residuo per contro non richiede attualizzazioni, mentre la nuda proprietà è in alcuni casi (se le quote capitale sono costanti) semplicemente il valore attuale di una rendita a rate costanti.

Per quanto concerne il valore residuo si ottiene:

$$V^*(r) = P^*(r) + U^*(r) = P^*(r) + \frac{i}{i^*}[D_r - P^*(r)] \tag{143}$$

da cui, sommando e sottraendo D_r:

$$\begin{aligned} V^*(r) &= P^*(r) + \frac{i}{i^*}[D_r - P^*(r)] + D_r - D_r = \\ &= \frac{i^*P^*(r) + iD_r - iP^*(r) - i^*D_r}{i^*} + D_r \end{aligned}$$

da cui:

$$V^*(r) = D_r + \frac{i - i^*}{i^*}[D_r - P^*(r)] \,. \tag{144}$$

La (144) mette in evidenza una interessante relazione che lega il valore residuo del prestito $V^*(r)$, con il debito residuo D_r: se $i^* > i$ accade che il valore residuo sia minore del debito residuo: $V^*(r) < D_r$, mentre vale la relazione opposta se $i^* < i$. Le due quantità coincidono solo a condizione di ugualianza fra tasso tecnico e di tasso di valutazione.

Come già accennato, valutazioni di prestiti nel corso della loro vita sono necessarie sia quando il creditore intende cedere il proprio diritto a riscuotere le future rate, sia quando il prestito deve essere rinegoziato per una anticipata estinzione. In ambedue i casi le condizioni del mercato al momento della valutazione saranno diverse da quelle che hanno portato alla stipula del contratto originario ed il tasso di valutazione i^* incorpora proprio le caratteristiche della nuova situazione.La relazione (144) spiega anche perchè, in caso di richiesta di estinzione anticipata, la banca erogatrice usualmente applichi per la valutazione un tasso $i^* < i$. Ciò equivale a richiedere, per l'estinzione, un importo superiore al debito residuo e la differenza a favore del mutuante ha il carattere della penale dovuta per la interruzione anticipata del contratto.

Si considerino ora i due più diffusi metodi di ammortamento, vale a dire quello a quota capitale costante e quello a rata costante e se ne determini il valore residuo con la corrispondente scomposizione in usufrutto e nuda proprietà. Il primo dei due casi si risulta particolarmente semplice: il debito residuo è la somma delle quote capitale future e la nuda proprietà è il loro valore attuale, vale a dire il valore attuale di una rendita a rate costanti. Per il secondo, poichè le quote capitale variano secondo una progressione geometrica, occorrerà determinare il valore attuale di rendite con rate in progressione geometrica.

Sia dunque S l'importo del debito da estinguere in n anni a quote capitale costanti. E' allora: $C_r = \frac{S}{n}$, r = 1, ..., n. Dalla (143) si ottiene:

$$P^*(r) = \frac{S}{n}\frac{1-(1+i^*)^{n-r}}{i^*} = \frac{S}{n}a_{\overline{n-r|}i^*}. \tag{145}$$

$$U^*(r) = \frac{i}{i^*}\left[\frac{S}{n}\left((n-r) - \frac{1-(1+i^*)^{n-r}}{i^*}\right)\right] = \frac{i}{i^*}\left\{\frac{S}{n}\left[(n-r) - a_{\overline{n-r|}i^*}\right]\right\}.$$

e quindi:

$$V^*(r) = \frac{S}{n}a_{\overline{n-r|}i^*} + \frac{i}{i^*}\left\{\frac{S}{n}\left[(n-r) - a_{\overline{n-r|}i^*}\right]\right\}. \tag{146}$$

Se l'ammortamento è a rata costante $R = \frac{S}{a_{\overline{n-r|}i^*}}$, allora il debito residuo al tempo r può essere calcolato come somma di n − r termini in progressione geometrica di ragione (1 + i) il cui primo termine è $C_{r+1} = R(1+i)^{-(n-r)}$. Si ha dunque:

$$D_r = \sum_{j=1}^{n-r} C_{r+j} = C_{r+1}\left[1+(1+i)+\dots+(1+i)^{n-r-1}\right] = \tag{147}$$

$$= R(1+i)^{-(n-r)}\frac{(1+i)^{n-r}}{i} = Ra_{\overline{n-r|}i}.$$

Il debito residuo è proprio il valore attuale delle rate ancora da pagare, calcolato al tasso originario i. Per quanto concerne la nuda proprietà si devono attualizzare, al tasso i^*, le future quote capitale. Si ha:

$$P^*(r) = \sum_{j=1}^{n-r} C_{r+j}(1+i^*)^{-j} = \tag{148}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-r} C_r(1+i)^j(1+i^*)^{-j} = C_r\sum_{j=1}^{n-r}\left(\frac{1+i}{1+i^*}\right)^j =$$

$$= C_r\frac{1+i}{1+i^*}\left[1+\frac{1+i}{1+i^*}+\dots+\left(\frac{1+i}{1+i^*}\right)^{n-r-1}\right]$$

ora se si pone: $\alpha = \frac{1+i}{1+i^*}$, il fattore in parentesi quadra assume la forma: $1+\alpha+\alpha^2+\dots+\alpha^{n-r-1}$ e se $\alpha > 1$ allora si può porre $\alpha = 1 + i'$ ed allora la somma $1 + (1+i') + \dots + (1+i')^{n-r-1}$ assume il significato di montante di una rendita a rata costante unitaria, di durata n − r anni, al tasso i'. Ponendo allora:

$$s_{\overline{n-r|}i'} = 1 + (1+i') + \dots + (1+i')^{n-r-1}$$

la (148) diventa ora:

$$P^*(r) = C_r\,(1 + i')\, s_{\overline{n-r}|i'} = R\,(1 + i)^{-n+r-1}\,(1 + i')\, s_{\overline{n-r}|i'}. \qquad (149)$$

La (149) esprime il fatto che la nuda proprietà, valore attuale di rate in progressione geometrica, può essere calcolato, se $i^* < i$, e quindi $\frac{1+i}{1+i^*} > 1$, come montante di una rendita a rate costanti, valutata al tasso fittizio $i' = \frac{i-i^*}{1+i^*}$.

Per quanto concerne l'usufrutto, dalla (142) e dalla (147) si ha:

$$\begin{aligned} U^*(r) &= \frac{i}{i^*}\left[R a_{\overline{n-r}|i} - R\,(1 + i)^{-n+r-1}\,(1 + i')\, s_{\overline{n-r}|i'}\right] = \qquad (150)\\ &= \frac{Ri}{i^*}\left[a_{\overline{n-r}|i} - (1 + i)^{-n+r-1}\,(1 + i')\, s_{\overline{n-r}|i'}\right] \end{aligned}$$

mentre per il valore residuo, è sufficiente sommare usufrutto e nuda proprietà.

Se è poi $\alpha < 1$, ovvero $\frac{i-i^*}{1+i^*} < 1$, si può interpretare α stesso come un fattore di attualizzazione relativo ad un tasso $i'' = \frac{i^*-i}{1+i}$ e quindi la somma $1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-r-1}$ rappresenta il valore attuale di una rendita unitaria anticipata di $n - r - 1$ rate. Ponendo allora:

$$(1 + i'')\, a_{\overline{n-r}|i''} = 1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{n-r-1}$$

la nuda proprietà diventa in questo caso:

$$P^*(r) = C_r\,\frac{1 + i}{1 + i^*}\,(1 + i'')\, a_{\overline{n-r}|i''}$$

ma ricordando che è ora: $1 + i'' = \frac{1+i^*}{1+i} > 1$, si ottiene:

$$P^*(r) = R\,(1 + i)^{-n+r-1}\, a_{\overline{n-r}|i''} \qquad (151)$$

ed infine l'usufrutto:

$$U^*(r) = \frac{Ri}{i^*}\left[a_{\overline{n-r}|i} - (1 + i)^{-n+r-1}\, a_{\overline{n-r}|i''}\right]. \qquad (152)$$

Come si vede introducendo il tasso fittizio i' (o i'') il calcolo di usufrutto e nuda proprietà per l'ammortamento a rata costante si riduce ad espressioni contenenti solo valori atuali di rendite a rate costanti.

9.2 Il problema della Ricerca del Tasso Interno di Rendimento.

9.2.1 Il Teorema del Punto Fisso e il Metodo di Newton per la Approssimazione di Radici di Funzioni.

Uno dei risultati matematici più notevoli, suscettibile di numerose applicazioni (dall'economia, alla teoria dei giochi, etc.) è il cosidetto teorema del punto fisso. La domanda alla quale esso intende rispondere,a prescindere dalle specifiche condizioni richieste per la sua validità, è la seguente: data una funzione $f(\bar{x})$, definita in A, opportuno sottoinsieme di $\Re^n$, sotto quali condizioni esiste un punto $\bar{x}^* \in A$ per il quale è: $f(\bar{x}^*) = \bar{x}^*$? Se tale punto esiste esso è detto punto fisso. L'interesse per il punto fisso e le sue applicazioni risiede anche nel fatto che dal teorema che ne stabilisce l'esistenza deriva, con un minimo di modifica, una utile metodologia per la ricerca approssimata di soluzioni di un generico sistema di equazioni. In quanto segue tuttavia, ci si occuperà del caso più semplice, quello in cui $f(x)$ è una funzione di una sola variabile, e la metodologia di soluzione alla quale si perviene riguarda la ricerca di radici di generiche equazioni. Connessa a tale metodologia è anche la possibilità di individuare il TIR per particolari tipologie di progetti finanziari, quali ad esempio l'investimento in BTP.

La dimostrazione che verrà data del teorema del punto fisso, formulato sotto opportune ipotesi semplificatrici, ha la particolarità di fornire anche un metodo costruttivo per individuare il punto stesso. Si tratta di un caso alquanto eccezionale: infatti le dimostrazioni dei teoremi usualmente danno come risultato condizioni di esistenza ed unicita, ma quasi mai metodi di costruzione.

Teorema 36 (Teorema del Punto Fisso) Sia $f(x)$ una funzione continua definita su di un compatto A e sia $f(A) \subset A$. Sia inoltre $f(x)$ una contrazione, ovvero sia, per qualunque coppia $(x_1, x_2) \in A$:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \theta\,|x_1 - x_2| \tag{153}$$

con $0 \geq \theta < 1$. Allora esiste un unico punto $x^* \in A$ tale che $f(x^*) = x^*$.

Prima di procedere alla dimostrazione del teorema si sottolinea il significato delle ipotesi che vi compaiono.

Essendo A un compatto ciò significa che esso è chiuso e limitato, dunque un intervallo (o unione di intervalli). E' poi immediato verificare che $f(x)$ è continua (dimostrare) e quindi, per il teorema di Weierstrass, anche l'immagine $f(A)$ è un compatto. Inoltre, in virtù sempre dello stesso teorema, esistono due punti x_m e x_M tali che $f(x_m) = m$ è il minimo di f in A e $f(x_M) = M$ ne è il massimo. Se α e β sono poi gli estremi di A, appartendo sia m che M ad A, essendo $f(A) \subset A$, dalla proprietà di contrazione segue che:

$$|M - m| = |f(x_M) - f(x_m)| \leq \theta\,|x_M - x_m| < |\beta - \alpha|$$

e dunque $f(A)$ è strettamente contenuto in A.

Si procede ora alla dimostrazione del teorema.

Posto che il punto fisso esista, si prova intanto che esso è unico. Siano infatti x^* e y^* due punti fissi. Allora, per definizione, si ha:

$$|x^* - y^*| = |f(x^*) - f(y^*)| \leq \theta\,|x^* - y^*|$$

e poichè è $\theta < 1$, deve essere $x^* = y^*$.

Si consideri ora un generico punto $x_0 \in A$ e si costruisca la successione:

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ ..,\ x_{n+1} = f(x_n),\ ... \tag{154}$$

Si proverà che la successione (154) risulta convergente ed il suo limite è proprio il punto fisso x^*. Dal punto di vista della individuazione del punto fisso inoltre, la convergenza della (154) garantisce che se ne potrà ottenere una approssimazione, accurata quanto si vuole, pur di arrestarsi ad un termine x_n con n sufficientemente grande.

Per dimostrare la convergenza si osservi intanto che valgolno le:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$
$$x_n = f(x_{n-1})$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ha:

$$x_{n+1} - x_n = f(x_{n+1}) - f(x_n)$$

e quindi applicando la proprietà di contrazione è anche:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq \theta\, |x_{n+1} - x_n| = \theta\, |f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq$$
$$\leq \theta^2 |x_{n-1} - x_{n-2}| \leq \ldots \leq \theta^n |x_1 - x_0|\,.$$

A questo punto è sufficiente provare che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un numero n_ε tale che, comunque si fissino p e q, con $n_\varepsilon < p < q$, è $|x_q - x_p| < \varepsilon$. E' intanto:

$$|x_q - x_p| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} (x_{n+1} - x_n)\right| \leq \sum_{n=p}^{q-1} |x_{n+1} - x_n| \leq \sum_{n=p}^{q-1} \theta^n |x_1 - x_0| =$$
$$= |x_1 - x_0| \sum_{n=p}^{q-1} \theta^n = |x_1 - x_0|\, \theta^p \frac{1-\theta^{q-p}}{1-\theta} < |x_1 - x_0|\, \theta^p \frac{1}{1-\theta}$$

ed essendo $\theta < 1$, scegliendo opportunamente p, la quantità $|x_1 - x_0|\, \theta^p \frac{1}{1-\theta}$ può essere resa piccola a piacere e quindi minore di ε. Pertanto, per $p > n_\varepsilon$ è:

$$|x_q - x_p| < |x_1 - x_0|\, \theta^p \frac{1}{1-\theta} < \varepsilon$$

e dunque $\{x_n\}$ è una successione convergente. Si può quindi scrivere:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}.$$

Intanto è $\tilde{x} \in A$, essendo A compatto. Resta solo da provare che $\tilde{x}$ è proprio il punto fisso. Sempre dalla proprietà di contrazione si ha che per $n > n_\varepsilon$:

$$|f(x_n) - f(\tilde{x})| \leq |x_n - \tilde{x}| < \varepsilon$$

ma è anche:

$$|f(x_n) - f(\tilde{x})| = |x_{n+1} - f(\tilde{x})| < \varepsilon$$

cioè le successioni $\{f(x_n)\}$ e $\{x_n\}$ hanno lo stesso limite per cui

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\tilde{x}) = \tilde{x}.$$

Occorre ora mostrare come sia possibile tradurre un problema di ricerca di una radice di una equazione in uno equivalente di punto fisso.

Sia $g(x) = 0$ l'equazione in questione e si definisca la funzione:

$$f(x) = \lambda g(x) + x \tag{155}$$

con $\lambda \neq 0$. E' immediato verificare che, qualora esista il punto fisso x^* di $f(x)$, esso è proprio la radice dell'equazione.

Infatti essendo per definizione $f(x^*) = \lambda g(x^*) + x^* = x^*$, è anche $g(x^*) = 0$.

Si consideri ora l'esempio seguente nel quale $g(x) = 0$ è la semplice equazione:

$$1 - x - x^5 = 0.$$

Essendo $g(0) = 1$, $g(1) = -1$ ed inoltre $g'(x) = -5x^4 - 1$, nell' intervallo chiuso (insieme compatto) $A = [0, 1]$ la $g(x)$ risulta monotona decrescente con valori di segno opposto agli estremi. In un punto $\alpha \in [0, 1]$ essa quindi si annulla. Se si pone $\lambda = 1$ si ha che la funzione $f(x) = g(x) + x = (1 - x - x^5) + x$, definita in $[0, 1]$, verifica che $f([0, 1]) \subset [0, 1]$ come è immediato constatare.

Per ottenere una approssimazione della radice α si costruisce la successione $\{x_n\}$. Scegliendo come punto iniziale $x_0 = 0.5$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5,\ x_1 = f(.5) = .96875,\ x_2 = f(.96875) = .14678,\\
x_3 &= f(.14678) = .99993,\ x_4 = f(.99993) = 3.4995 \times 10^{-4}\\
x_5 &= f(3.4995 \times 10^{-4}) = 1.0,\ x_6 = f(1) = 0,\ x_7 = f(0) = 1
\end{aligned}$$

come si vede la successione oscilla fra 0 e 1. Per quale ragione il metodo non ha funzionato? Innanzitutto $f([0, 1]) = [0, 1]$, ovvero l'immagine di $f(x)$ non è strettamente contenuta in A e da ciò segue che la f stessa non è una contrazione. Dunque occorre verificare, prima di dar corso alla procedura, che la proprietà di contrazione è verificata. In questo semplice caso è facile congetturare che l'essere o meno una contrazione possa dipendere dalla scelta del valore dato al parametro λ. Se si sceglie un valore minore di 1, ad esempio $\lambda = 0.7$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5,\ x_1 = f(0.5) = .82813,\ x_2 = f(.82813) = .6758,\\
x_3 &= f(.6758) = .80407,\ x_4 = f(.80407) = .70595,\ x_5 = f(.70595) = .78905,\\
x_6 &= f(.78905) = .72261,\ x_7 = f(.72261) = .77887,\ x_8 = f(.77887) = .73302,\\
x_9 &= f(.73302) = .77176,\ x_{10} = f(.77176) = .73988,\ x_{11} = f(.7398) = .76676
\end{aligned}$$

Si vede che, sia pure lentamente la successione ottenuta mostra di convergere ad un valore compreso fra 0.739 e 0.766.

Per tornare al parametro λ, questo ha proprio la funzione di contrarre la funzione $f(x)$ così che $f(A)$ sia strettamente contenuto in A, in modo da garantire che valga la proprietà di contrazione, ed è facile immaginare che la scelta di λ ha a che fare con la velocità di convergenza. Si provi infatti $\lambda = 0.5$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 0.5,\ x_1 = .73438,\ x_2 = .76039,\ x_3 = .75309,\ x_4 = .75543,\ x_5 = .7547\\
x_6 &= .75493
\end{aligned}$$

Come si vede con questa scelta la convergenza è molto più rapida.

L'applicazione del metodo per la ricerca del punto fisso è subordinata dunque alla preventiva verifica che la funzione in oggetto sia una contrazione, verifica questa che, al di fuori di casi semplici come quello appena analizzato, non è sempre eseguibileSi può però fornire, introducendo l'ipotesi di derivabilità per $f(x)$, una condizione sufficiente, di facile applicazione, dalla quale discende la proprietà di contrazione.

Sia dunque $f(x)$ derivabile nei punti interni di A. Se x e $x + h$ sono due arbitrari punti in A, e se inoltre $f(x)$ è una contrazione vale che:

$$|f(x + h) - f(x)| \leq \theta\, |x + h - x|$$

da cui

$$\left|\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right| \leq \theta$$

e passando al limite, avendo supposta la derivabilità, è:

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x + h) - f(x)}{h}\right| = \left|\frac{df(x)}{dx}\right| \leq \theta < 1.$$

Dunque se è $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| < 1$, per ogni $x \in A$, allora $f(x)$ è una contrazione. Quest è la condizione sufficiente che garantisce la convergenza del metodo.

Tornando all'esempio svolto più sopra, si vede che per $\lambda = 1$ è: $\left|\frac{df(x)}{dx}\right| = 5\,|x|^4 \geq 1$ per $x \geq 5^{-\frac{1}{4}} = .6687$. In effetti la condizione sufficiente non è in questo caso verificata.

Per la ricerca di radici di una equazione del tipo $g(x) = 0$ è stato formulato un metodo, dovuto a Newton; per il quale è garantita la applicabilità della procedura del punto fisso introducendo le due ipotesi seguenti (abbastanza facilmente verificabili):

a) che $g(x)$ sia derivabile due volte in un intorno della radice che si vuole individuare (intorno che possiamo assumere quale intervallo A);

b) che sia $\frac{dg(x)}{dx} \neq 0$ nell'intervallo medesimo.

Il metodo opera attraverso la preliminare costruzione della funzione ausiliaria:

$$\varphi(x) = x - \frac{g(x)}{\frac{dg(x)}{dx}} \tag{156}$$

la quale, nell'intorno della radice α, risulta una contrazione. Infatti è:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = 1 - \frac{g'(x)\, g'(x) - g(x)\, g''(x)}{[g'(x)]^2} = \frac{[g'(x)]^2 - [g'(x)]^2 + g(x)\, g''(x)}{[g'(x)]^2} =$$
$$= \frac{g(x) g''(x)}{[g'(x)]^2}$$

ed essendo $g(\alpha) = 0$, e $g'(x) \neq 0$, esiste un intorno di α stesso (in virtù della continuità di $f(x)$) ove $g(x)$ assume valori arbitrariamente piccoli, tali dunque da garantire che sia $\left|\frac{g(x) g''(x)}{[g'(x)]^2}\right| < 1$.

Per la funzione ausiliare $\varphi(x)$ il problema di punto fisso ammette quindi soluzione e pertanto esiste un x^* per il quale: $\varphi(x^*) = x^* - \frac{g(x^*)}{g'(x^*)} = x^*$, ovvero $-\frac{g(x^*)}{g'(x^*)} = 0$ ed essendo $g'(x^*) \neq 0$, discende che $g(x^*) = 0$, ovvero $\alpha = x^*$ è una radice dell'equazione.

La procedura di individuazione della soluzione approssimata è ora agilmente ricavabile: si fissa un valore arbitrario x_0 (che si ritiene non sia molto distante dalla radice cercata) e si calcola $x_1 = \varphi(x_0)$, quindi $x_2 = \varphi(x_1)$ e così via fino ad ottenimento della approssimazione voluta.

Il metodo presentato è noto con il nome di metodo di Newton o metodo delle tangenti. Questa ultima denominazione deriva dalla interpretazione geometrica della procedura. Questa merita qualche commento. Se si considera il grafico di $g(x)$ e della sua tangente nel punto di coordinate $(x_0, g(x_0))$, quest'ultima ha equazione:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ovvero

$$y = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0)$$

e l'intersezione della tangente con l'asse delle ascisse $(y = 0)$ si ha nel punto $x = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$, vale a dire in x_1. Dunque ad ogni iterazione, dal punto di vista geometrico, non si fa altro che considerare la tangente a $g(x)$ nel punto che ha come ascissa il valore trovato al passo precedente. L'intersezione della retta tangente con l'asse delle ascisse individua il punto successivo. Il segmento (x_1, x_0), differenza fra i due valori succesivi individuati, di lunghezza $|x_1 - x_0|$, è detto sottotangente, per la ragione geometrica appena chiarita. E' immediato constatare che, in base all'equazione della tangente nel punto (x_0):

$$0 = g(x_0) + g'(x_0)(x_1 - x_0)$$

si ha che:

$$x_1 - x_0 = -\frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = -\frac{1}{\frac{d[\log g(x)]}{dx}} \tag{157}$$

ovvero, prescindendo dal segno, dato che in quanto lunghezza deve essere sempre considerata positiva, il segmento in questione (la sua lunghezza) è il reciproco di una derivata logaritmica. Si tratta dunque del reciproco di una intensità. Se la variabile x rappresenta un tempo, la sottotangente è anche essa un tempo (appunto reciproco di una intensità).

9.2.2 Problematiche Connesse alla Ricerca del TIR.

Una delle applicazioni per la quale l'uso del criterio di ricerca della radice di una equazione risulta particolarmente utile è quella inerente la individuazione del TIR di un progetto finanziario. E'prassi cosolidata, sia fra gli operatori che fra i teorici, assumere questo valore quale indice disintesi nel quale tradurre la convenienza ad attuare determinati progetti finanziari di tipo deterministico (progetti per i quali la certezza delle poste, sia in relazione alla loro esigibilità che all'ammontare, fa parte delle ipotesi).Dovendo scegliere fra diversi progetti di investimento, questi vengono classificati in base al loro TIR e la graduatoria che ne risulta esprime l'ordine di preferenza degli stessi. Il criterio di scelta che ne risulta appare del tutto naturale (se devo investire preferisco il progetto che rende di più), tuttavia non mancano i punti deboli del metodo sia dal versante della sua applicabilità che da quello della coerenza in senso economico-finanziario.

Prima di analizzare pregi e difetti del TIR diamone una definizione rigorosa.

Definizione 37 Dato un progetto finanziario di tipo deterministico, definito dal flusso: $\bar{x} = (x_0, x_1, ..., x_m)$ riferito allo scadenziario $\bar{t} = (t, t_1, ..., t_m)$, dove t rappresenta l'istante iniziale della operazione, si definisce TIR del progetto il tasso i^* in base al quale l'operazione risulta equa in regime di capitalizzazione composta.

In base alla definizione appena data appare evidente che la ricerca del tasso interno di rendimento, se si sceglie ad esempio l'istante iniziale t quale epoca di valutazione, comporta la soluzione di una equazione del tipo:

$$W_t(i) = \sum_{j=0}^{m} x_j (1 + i)^{-(t_j - t)} = 0. \tag{158}$$

E poichè un polinomio di grado arbitrario come quello presnte nella (158) ammette radici reali e/o complesse in numero pari al grado del polinomio stesso, la significatività del criterio TIR, dal punto di vista analitico, è garantita solo nel caso in cui vi è una unica radice reale e positiva.Quindi solo progetti che garantiscano questo risultato possono essere confrontati alla luce del tasso interno di rendimento. Segue da ciò che il criterio non è universalmente applicabile. Questo è il primo limite insito nel metodo del TIR, mentre la sua oggettività (non dipendendo da alcun parametro soggettivo che l'operatore debba inserire) è senza dubbio il suo maggior pregio.

La famiglia dei progetti che superano il test del TIR è quella dei polinomi di grado m che ammettono unica radice reale positiva. A questa famiglia appartengono i polinomi i cui coefficienti presentano una unica variazione di segno, come si deduce dalla regola di Cartesio. Per quanto riguarda l'applicabilità ai progetti finanziari, questa regola impone che il flusso sia strutturato su di un unico esborso iniziale essendo poi tutte le altre poste introiti (progetti di questo tipo sono anche detti di puro investimento), opure su di una serie di esborsi con un unico introito finale. Progetti di investimento consistenti nell'acquisto di un titolo e nella riscossione delle relative poste rientrano dunque fra quelli analizzabili in base al TIR. E' facile vedere, anche senza ricorrere ala regola dei segni, che per operazioni di questo tipo è garantita una unica radice reale per la funzione valore $W_t(i)$.

Infatti ponendo $\bar{x} = (-p, x_1, ..., x_m)$ dove p è il prezzo di acquisto del titolo e x_j il generico pagamento promesso al tempo t_j, è intanto: $W_t(0) = -p + \sum_{j=1}^{m} x_j > 0$ (se il prezzo fosse superiore alla somma dei valori incassabili in futuro l'operazione sarebbe finanziariamente priva di senso). Inoltre è

$\lim_{i\to\infty} W_t(i) = -p < 0,$ e poichè $W_t(i)$ è una funzione continua, vi è almeno un attraversamento dell'asse i. Essendo poi: $\frac{dW_t(i)}{di} = -\sum_{j=1}^{m} (t_j - t)\, x_j^{-(t_j - t - 1)} < 0$ la funzione risulta monotona decrescente e dunque si annulla in un solo punto.

Per quanto riguarda l'altro problema, quello cioè legato alla coerenza del criterio TIR, muovendosi all'interno di una logica di tipo economico-finanziario, si consideri prima il caso in cui l'investimento ha per oggetto uno zcb. Indicando con p il suo prezzo, con C il valore di rimborso e con t_m i periodi a scadenza, per definizione, il tasso di rendimento effettivo è la soluzione dell'equazione:

$$-p + C(1+i)^{-(t_m - t)} = 0 \tag{159}$$

ovvero, moltiplicando ambedue i membri per $(1+i)^{t_m - t}$

$$p(1+i)^{t_m - t} = C \tag{160}$$

da cui:

$$i^* = \left(\frac{C}{p}\right)^{\frac{1}{t_m - t}} - 1.$$

L'interpretazione del TIR in questo semplice contesto è agevole. L'investimento in questione può essere assimilato al versamento dell'importo p in un deposito bancario per ritirare a scadenza il montante dello stesso. La scelta dell'istituto presso il quale effettuare il deposito cade su quello che pratica le migliori condizioni, vale a dire quello che offre il migliore tasso di impiego i^*. E di fatto si ha che ritirando il montante dopo m periodi si ottiene $C = p(1+i^*)^m$ proprio come richiesto dalla (159). Scegliere in base al TIR equivale dunque a preferire il deposito per il quale si riceve la più alta remunerazione in una logica che si potrebbe definire della migliore condizione di impiego.

Se si vuole ora mantenere la stessa logica applicando il criterio del tasso interno a progetti leggermente più complessi, come l'investimento in un titolo con cedole, si vede subito che senza l'assunzione di particolari ipotesi perde di significato il principio della migliore condizione di impiego. Infatti, indicando ancora il flusso tramite il vettore $\overline{x} = (-p, x_1, ..., x_m)$, ed applicando la (158) si ottiene:

$$p = \sum_{j=1}^{m} x_j (1+i^*)^{-(t_j - t)}$$

e moltiplicando anche in questo caso ambedue i membri per $(1+i^*)^{t_m - t}$ si ha:

$$p\,(1+i^*)^{t_m - t} = \sum_{j=1}^{m} x_j (1+i^*)^{(t_m - t_j)}.$$

Il membro di sinistra è lo stesso della (160) ed è quindi ancora interpretabile come il montante ottenibile in t_m dal deposito di un importo pari al prezzo p del titolo. Il membro di destra tuttavia indica che questa assunzione richiede il reinvestimento delle cedole, man mano che vengono riscosse, alle stesse condizioni di tasso i^*. Dunque se si voule giustificare il TIR come criterio di scelta nel senso della condizione di migliore impiego, occorre ipotizzare che sussistano condizioni di mercato caratterizzate da una struttura piatta dei rendimenti e che inoltre nelle epoche future queste condizioni permangano invariate. Come si vede si tratta di ipotesi alquanto restrittive e quindi si può concludere che se si intende utilizzare il criterio del TIR quale metodologia per la scelta di investimenti, è necessario essere consapevoli di quale sia il suo effetivo significato edi quale sia l'insieme delle ipotesi che lo fondano.

Chiariti significato e applicabilità del criterio del TIR, la sua effettiva determinazione si riduce alla applicazione del metodo di Newton per la ricerca della unica radice reale e positiva del polinomio $P(v) = -x_0 + x_1 v^{t_1 - t} + x_2 v^{t_2 - t} + \ldots + x_m v^{t_m - t}$, dove con x_0 viene indicato il prezzo.

Si consideri l'esempio di un BTP scadente l'1 novembre 2001, caratterizzato dal flusso:

$$\bar{x} = (5.25, 5.25, 5.25, 5.25, 5.25, 105.25)$$

il cui scadenziario decimale (avendo assunto come origine t = 0 il 23/4/1999) è:

$$\bar{\tau} = (0.0195, 0.519, 1.0195, 1.519, 2.0195, 2.519) .$$

La funzione che fornisce il valore attuale del flusso in termini del fattore di attualizzazione incognito $v = \frac{1}{1+i}$ e del prezzo 118.87 del titolo è in questo caso:

$$W(v) = 5.25(v^{0.0195} + v^{0.519} + v^{1.019} + v^{1.519} + v^{2.109}) + 105.25v^{2.519} - 118.87$$

La funzione ausiliaria diventa ora:

$$\varphi(v) = v - \frac{W(v)}{\frac{dW(v)}{dv}}$$

vale a dire:

$$\varphi(v) = v - \frac{5.25v^{.0195} + 5.25v^{.519} + 5.25v^{1.019} + 5.25v^{1.519} + 5.25v^{2.109} + 105.25v^{2.519} - 118.87}{\frac{.10238}{v^{.9805}} + \frac{2.7248}{v^{.481}} + 5.3498v^{.019} + 7.9748v^{.519} + 11.072v^{1.109} + 265.12v^{1.519}}$$

Scegliendo il punto iniziale $v_0 = 0.8$ si ottiene la sequenza:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \varphi(.80000) = .97721 \\
v_2 &= \varphi(.97721) = .95573 \\
v_3 &= \varphi(.95573) = .95539 \\
v_4 &= \varphi(.95539) = .95539.
\end{aligned}$$

e quindi $v = .95539$ da cui $i = \frac{1}{v} - 1 = 0.046693$, è il tasso annuo di rendimento cercato.

Si consideri ancora un esempio, riferito ad una semplice operazione di rendita, dal quale si possono dedurre utili osservazioni sulle modalità di applicazione del metodo.

Siano ancora $\overline{x} = (-A, 1, 1, ..., 1)$ e $\overline{t} = (0, 1, 2, ..., n)$ i vettori del flusso e dello scadenziario di una rendita unitaria il cui valore attuale è A. La funzione valore, dipendente dal tasso x, è

$$W_0(x) = -A + \sum_{j=1}^{n} (1+x)^{-j}$$

e quindi la funzione ausiliaria:

$$\varphi_0(x) = x - \frac{W_0(x)}{\frac{dW_0(x)}{dx}} = x - \frac{-A + \sum_{j=1}^{n} (1+x)^{-j}}{-j \sum_{j=1}^{n} (1+x)^{-j}} (1+x) . \qquad (161)$$

La condizione per l'applicabilità del metodo di Newton: $\frac{dW(x)}{dx} \neq 0$ è banalmente verificata per ogni $x > 0$ e dunque la procedura può essere utilizzata con successo.

Si passi poi ad una operazione del tutto identica a quella esaminata nella quale si modifica solamente l'istante di valutazione, scegliendo ora l'epoca $t = n$ per effettuare la valutazione. Data la la scindibilità della legge impiegata, nulla cambia nella natura del problema. Essendovi ancora un unico cambiamento di segno negli importi del flusso, l'unica radice reale positiva dovrà coincidere con quella ricavabile in base alla (161).

Avremo in questo caso:

$$W_n(x) = -A(1+x)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (1+x)^j .$$

La funzione ausiliaria $\varphi_n(x)$ diventa ora:

$$\varphi_n(x) = x - \frac{W_n(x)}{\frac{dW_n(x)}{dx}} = x - \frac{-A(1+x)^n + \sum_{j=0}^{n-1} (1+x)^j}{-n(1+x)^{n-1} + j \sum_{j=0}^{n-1} (1+x)^j} .$$

Come si vede la derivata ora è $\frac{dW_n(x)}{dx} = -n(1+x)^{n-1} + j \sum_{j=0}^{n-1} (1+x)^j$ e trattandosi della somma di termini positivi ed uno negativo, niente garantisce che in ogni caso, per $x > 0$, $\frac{dW_n(x)}{dx} \neq 0$. Può quindi accadere che a seconda del valore iniziale x_0 dal quale si parte l'applicazione del metodo di Newton conduca verso punti sempre più vicini a quello critico ove $\frac{dW_n(x)}{dx}$ si annulla. In tal caso la procedura si arresta per overflow e la radice non viene più avvicinata.

E' quindi strategicamente rilevante, dal punto di vista della applicabilità del metodo di Newton, la scelta dell'istante di valutazione. Le considerazioni appena svolte portano a concludere che al fine di evitare possibili fallimenti della procedura, l'istante di valutazione deve essere sempre quello in corrispondenza del quale vi è l'elemento delflusso di segno diverso rispetto a tutti gli altri.