Matematica Finanziaria

1. Concetti di base

Introduzione

Legge di capitalizzazione semplice

Legge di capitalizzazione composta

Sconto commerciale

Conteggio dei giorni

Tassi equivalenti

Riferimento: Cesari, Susini, Introduzione alla Finanza Matematica capitolo 1

Cosa la finanza matematica?

- E' lo studio delle relazioni tra importi monetari relativi a date diverse
- Esempi:
  1. Prestito
  2. Investimento
- Equivalenza finanziaria ⇒ Interesse
  1. Attualizzazione
  2. Capitalizzazione
- Confronto tra operazioni finanziarie

Capitalizzazione semplice

- Consideriamo una operazione finanziaria che fa corrispondere il capitale K in t con il montante M in T
- *Interesse*

$$I = M - K$$

`e sempre positivo!
- *Tasso divariazione delcapitale* (o tasso diinteresse periodale)

$$\frac{M - K}{K} = \frac{I}{K}$$

- *Tasso diinteresse semplice*

$$R_S(t, T) = \frac{M - K}{K} \frac{1}{T - t}$$

- Esempio: $K = 100$, $M = 110$, $t = 0$, $T = 2$

Capitalizzazione e attualizzazione

- **Capitalizzazione:** Dato il capitale K ed il tasso di interesse semplice $R_s(t, T)$ calcolare il montante M
- Fattore montante $\frac{M}{K}$
- **Attualizzazione:** Dato il montante M ed il tasso di interesse semplice $R_s(t, T)$ calcolare il capitale K
- Fattore di sconto $\frac{K}{M}$

Interessi semplici

- Partiamo con un capitale K al tempo t,

$$V(t) = K$$

- Dopo un anno:

$$V(t+1) = V(t) * (1 + R_s)$$

- : ... dopo n anni

$$V(t+n) = V(t) * (1 + R_s * n)$$

Legge di capitalizzazione semplice

- $$V(T) = V(t) * (1 + R_S * (T - t))$$
- Fattore montante
$$1 + R_S * (T - t)$$
- Fattore di sconto
$$\frac{1}{1 + R_S * (T - t)}$$

Interessi composti

- Calcoliamo gli interessi su capitale iniziale più interessi accumulati fino a quel momento
- In formule:

$$V(t+n) = V(t+n-1) * (1+R)$$

- Partendo da $V(t) = K$ ...
- ... dopo un anno...

$$V(t+1) = V(t) * (1+R)$$

- ...dopo n anni...

$$V(t+n) = V(t+n) * (1+R)^{n}$$

Legge di capitalizzazione composta: Fattori e tassi

- $$V(T) = V(t) * (1+R)^{T-t}$$
- Fattore montante
$$\frac{M}{K} = (1+R)^{T-t}$$
- Fattore di sconto
$$\frac{K}{M} = (1+R)^{-(T-t)}$$
- Tasso di interesse
$$R = \left(\frac{M}{K}\right)^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

Legge di capitalizzazione composta: esempi

- Quanto tempo impiega il capitale $K = 100$ per trasformarsi nel montante $M = 110$ al tasso composto annuo del 4%?
- Quanto tempo impiega un capitale di 100000 euro a raddoppiare, se il tasso composto annuo è dell' 8%?

Legge di capitalizzazione continua

- Generalizzando su un intervallo di ampiezza dt la legge

$$V(t+n+1) = V(t+n) + 1 * R * V(t+n)$$

- $$V(s+ds) = V(s) + ds * R_c * V(s)$$

- Passando al limite per $ds \to 0$,

$$\frac{dV(s)}{ds} = R_c V(s)$$

- Soluzione:

$$V(T) = Ke^{R_c(T-t)}$$

Legge di capitalizzazione continua: Fattori e tassi

- $$V(T) = V(t) * e^{R_c *(T-t)}$$
- Fattore montante
$$e^{R_c *(T-t)}$$
- Fattore di sconto
$$e^{-R_c *(T-t)}$$
- Tasso di interesse
$$R_c = \frac{\log \frac{V(T)}{V(t)}}{T-t}$$

Sconto commerciale

- $$V(t) = V(T) * (1 - (T - t) * R_d)$$
- Utilizzato nelle banche per la riscossione di carte commerciali (cambiali)
- Tasso disconto
$$R_d = \frac{M - K}{M * (T - t)}$$

Conteggio dei giorni

- Per il calcolo dei giorni di durata di un'operazione ci sono diverse convenzioni
- ACT/360
- ACT/365
- ACT/ACT
- 30/360

Tassi finanziariamente equivalenti

- In un contratto, la scelta della legge di capitalizzazione è molto rilevante
- Lo stesso tasso di interesse produce montanti differenti a seconda della legge di capitalizzazione adottata
- Analogamente, dati K, M, $T - t$ si ricavano tassi diversi a seconda della legge adottata
- I tassi R_S, R, R_c sono **finanziariamente equivalenti** sul periodo (t, T) se trasformano lo stesso capitale nello stesso montante

Tassi temporalmente equivalenti

- Il tasso di interesse dipende dalla scala temporale adottata (mensile, annuale, ecc.)
- Due tassi riferiti a scale temporali diverse si dicono **temporalmente equivalenti** se producono lo stesso montante nello stesso periodo
- Esempio: Determinare il tasso semplice mensile temporalmente equivalente al tasso semplice annuo del 5%
- Se j è la frequenza nell'anno (es. $j = 12$ per mese, $j = 2$ per semestre)

$$R_s^{(j)} = \frac{R_s}{j}, \quad R^{(j)} = \left(1 + R^{(j)}\right)^j - 1, \quad R_c^{(j)} = \frac{R_c}{j}$$