Principio d'Induzione

Titolo nota 29/04/2017

Esercizio: Provare per induzione che se A è un insieme costituito da n elementi allora l'insieme delle Parti $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi

Si procede per induzione su $|A| = n$

Per $n = 1$ i soli sottoinsiemi di A sono quelli impropri, ϕ ed A, quindi $\mathcal{P}(A)$ ha 2 elementi.

Supponiamo adesso il risultato vero per insiemi con meno di n elementi e proviamolo per A, con $|A| = n$.

Fissiamo un elemento $a \in A$; tutti i sottoinsiemi di A si possono suddividere in quelli contenenti a e quelli non contenenti a.

Allora quanti sono quelli non contenenti a?

Ovviamente essi sono i sottoinsiemi di $A \setminus \{a\}$, insieme con $n-1$ elementi, quindi il numero di questi sottoinsiemi è 2^{n-1} (per ipotesi induttiva).

E quelli contenenti a?

Ma tali sottoinsiemi si ottengono proprio aggiungendo l'elemento a ad ogni sottoinsieme di $A \setminus \{a\}$, quindi anche questi saranno 2^{n-1}.

In definitiva i sottoinsiemi di A sono:

$$2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

c.v.d.