TEORIA DEI GRUPPI

Titolo nota 29/04/2017

Esercizio: Sia G un gruppo ed $S \subseteq G$ un suo sottoinsieme. Si pone

$$N_S = \{x \in G \mid xS = Sx\}$$

a) provare che N_S è un sottogruppo di G

Se S è un sottogruppo, provare che

b) $S \subseteq N_S$

c) S è un sottogruppo normale di N_S

d) N_S è il più grande dei sottogruppi in cui S è normale, cioè se G' è un sottogruppo di G ed S è normale in G' allora $G' \subseteq N_S$

a) Osservato che $e \in N_S$, siano $x, y \in N_S$ allora $xS = Sx$ e $yS = Sy$ da cui $Sy^{-1} = y^{-1}S$; da ciò segue $xy^{-1}S = xSy^{-1} = Sxy^{-1}$, cioè abbiamo $xy^{-1} \in N_S$ e quindi N_S è un sottogruppo.

b) Se $s \in S$, ed S è un sottogruppo, è noto che sS ed Ss coincidono con S, per cui $s \in N_S$ e quindi $S \subseteq N_S$.

c) Se $x \in N_S$ si ha $\rightarrow$ $xSx^{-1} = Sxx^{-1} = S$ ovvero S è normale in N_S.

d) Sia G' un sottogruppo di G in cui S è normale e proviamo che $G' \subseteq N_S$.

Considerato un qualsiasi elemento $x \in G'$, poiché S è normale in G', è $xSx^{-1} = S$ cioè $x \in N_S$; pertanto $G' \subseteq N_S$