Studio di Funzione

Titolo nota — 13/05/2017

Funzione 1 : $f(x) = x \lg x$

1) Insieme d'esistenza

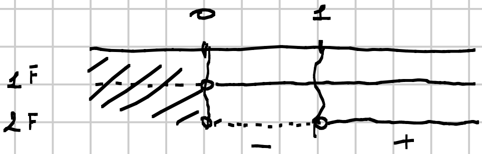
La presenza del logaritmo impone che sia $x > 0$, per cui $Df = (0, +\infty)$

2) Studio del segno di $f(x)$

$x \lg x > 0$ — x: 1° fattore; $\lg x$: 2° fattore

1° F : $x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+_0$

2° F : $\lg x > 0 \to x > e^0 \to x > 1$



La funzione è positiva per $x > 1$ e negativa per quei valori di $x < 1$ che appartengono al campo d'esistenza Df e precisamente per $0 < x < 1$ dove risulta definita.

3) Limiti significativi agli estremi di Df

$$\lim_{x \to 0^+} x \lg x = (0^+)(-\infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\lg x^H}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}(-x^2) = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \lg x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

4) Ricerca di eventuali asintoti obliqui

Poiché è soddisfatta la condizione necessaria $\lim_{x \to +\infty} x \lg x = +\infty$ si cerca l'eventuale esistenza dell'asintoto obliquo destro:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \lg x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \lg x = +\infty$$

Quindi essendo il risultato del limite infinito, l'asintoto obliquo non esiste.

5) Intersezione con gli assi

$$\begin{cases} y = x \lg x \\ y = 0 \end{cases} \text{(equazione asse x)} \qquad \begin{cases} x \lg x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \cup \lg x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \cup x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

La soluzione $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ non è accettabile poiché $x = 0 \notin Df$.

Il grafico interseca l'asse x nel punto di coordinate $(1, 0)$

$$\begin{cases} y = x \lg x \\ x = 0 \end{cases}$$ (equazione asse y) non accettabile poiché $0 \notin Df$

Il grafico, pertanto, non interseca l'asse y

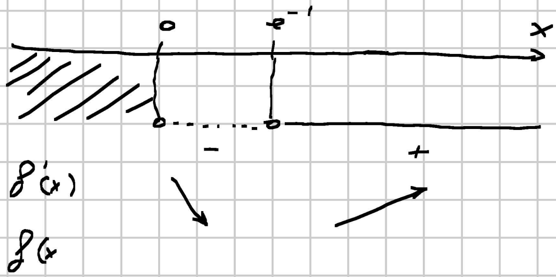
6) CALCOLO DELLA DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \lg x + x \cdot \frac{1}{x} = \lg x + 1 \qquad Df' : (0; +\infty)$$

7) STUDIO DEL SEGNO DI $f'(x)$

$$f'(x) > 0 \to \lg x + 1 > 0 \to \lg x > -1 \to x > e^{-1}$$

La derivata prima è quindi positiva per $x > e^{-1}$ e negativa per quei valori di $x < e^{-1}$ che appartengono a Df' ossia nell'intervallo $(0, e^{-1})$



La funzione è quindi crescente nell'intervallo $(e^{-1}; +\infty)$ e decrescente nell'intervallo $(0; e^{-1})$

Poiché $e^{-1} \in Df$, in tale punto la funzione presenta un minimo relativo di ordinata:

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \lg e^{-1} = e^{-1}(-1) \lg e = -e^{-1} \qquad m\,(e^{-1}; -e^{-1})$$

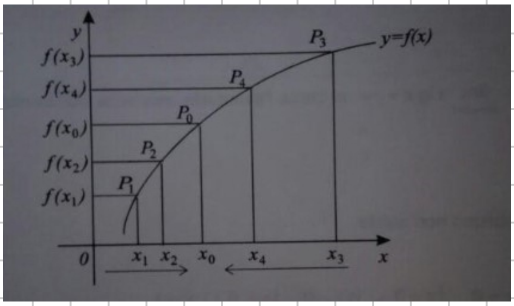
Inoltre $e^{-1} \in Df'$ per cui la funzione ammette derivata in tale punto e precisamente derivata nulla ("TEOREMA DI FERMAT": se una funzione $f(x)$ ammette massimo o minimo relativo in un punto in cui essa è derivabile, la derivata è nulla)

OSSERVAZIONI

Il limite della derivata prima consente di conoscere la pendenza del diagramma di $f(x)$ in prossimità di un punto (in questo caso $x = 0$) dove essa non è definita.

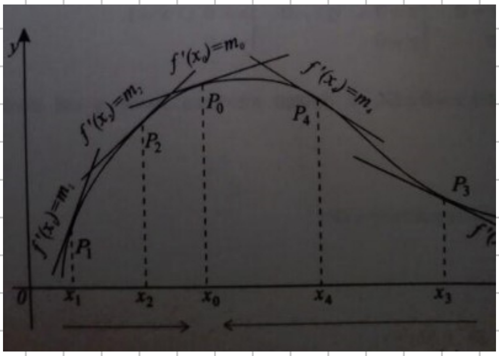
Si deve tener presente che il limite di una funzione in un punto fornisce indicazioni di come varia l'ordinata y quando la x si avvicina a tale punto mentre il limite in un punto della derivata prima fornisce indicazioni di come varia il coefficiente angolare (pendenza) della tangente geometrica al grafico quando la x si avvicina a tale punto.

In linguaggio grafico:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Limite di una funzione in punto



$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) = m_0$$

Limite della derivata prima in un punto x_0 appartenente ad un intervallo dove la funzione è ovunque derivabile

Avvicinandosi la x ad x_0 la derivata prima $f'(x)$ assume valori che rappresentano i coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico di $f(x)$ nei punti $P[x, f(x)]$ come viene indicato in figura.

Nel caso della funzione $f(x) = x \lg x$, eseguendo il limite della derivata prima per $x \to 0^+$, si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} (\lg x + 1) = -\infty$$

Tale risultato sta ad indicare che avvicinandosi la x a zero, per valori positivi, le tangenti geometriche al grafico nei punti $P[x, f(x)]$ tendono a disporsi verticalmente, per cui il diagramma della funzione presenta in prossimità dello zero tangente verticale.

8) CALCOLO DELLA DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \frac{1}{x} \qquad Df'' = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty) \cap (0; +\infty) = (0, +\infty)$$

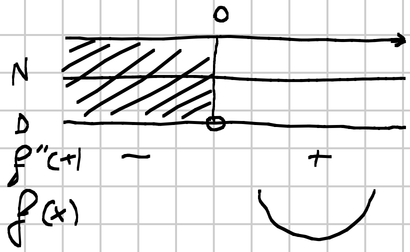
9) STUDIO DEL SEGNO DI $f''(x)$

A questo punto bisogna porre $f''(x) > 0$ per stabilire dove essa risulta positiva e quindi, di conseguenza, dove risulta negativa.

Allo stesso risultato si giunge più rapidamente mettendo a confronto lo studio del segno del numeratore e del denominatore se, come in questo caso, si tratta di espressioni fratte.

$\frac{1}{x} > 0$ N : $1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

D : $x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_0^+$



La $f''(x)$ risulta positiva nell'intervallo $(0, +\infty)$ e negativa nell'intervallo $(-\infty; 0)$ che non viene preso in considerazione poiché non appartiene a D_f.

Il grafico, quindi, volge la concavità verso l'alto in tutto D_f.

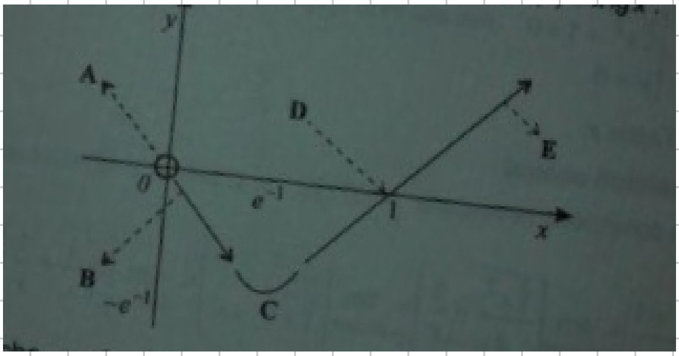
Si riportano ora sopra un piano cartesiano ortogonale, ossia si traducono in linguaggio grafico, tutte le informazioni ottenute.

In genere si procede nel modo seguente:

1) si tracciano le rette che rappresentano gli eventuali asintoti;
2) si indica, con delle frecce, il comportamento della funzione agli estremi dell'insieme di esistenza e gli eventuali punti di massimo, minimo relativo e di flesso della $f(x)$; con dei vettori si indicano gli intervalli dove la funzione cresce o decresce.
3) si individuano poi, mediante trattini, gli eventuali punti di intersezione del grafico con gli assi x e y oppure i punti di tangenza con l'asse x
4) una linea, non necessariamente continua, che soddisfa le indicazioni trovate per la $f(x)$ ne rappresenta il grafico.

10) COSTRUZIONE DEL GRAFICO

Si traducono in linguaggio grafico le condizioni trovate per la funzione $f(x) : x \lg x$



A : Il tondino vuoto indica che $x=0$ non appartiene a Df

B = La funzione decresce con la concavità rivolta verso l'alto

C : Simbolo del punto di minimo relativo dove la funzione risulta derivabile

D = Punto di attraversamento dell'asse x

E = La funzione è crescente con la concavità rivolta verso l'alto

Successivamente si traccia la linea che soddisfa le condizioni riportate sul piano cartesiano e si ottiene il diagramma di $f(x)$