STUDIO DI FUNZIONE

Titolo nota 14/05/2017

FUNZIONE : $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + 1$

1 · INSIEME DI ESISTENZA

Essendo la radice cubica (quindi con indice dispari), allora non vi sono limitazioni, per cui $Df = (-\infty; +\infty)$

2 · SIMMETRIE

La funzione è pari per cui è simmetrica rispetto all'asse y. Sarebbe sufficiente studiarla solo per $x \geq 0$, ma in questo specifico caso preferisco studiarla su tutto il campo d'esistenza Df.

3 · STUDIO DEL SEGNO DI $f(x)$

$\sqrt[3]{x^2} + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ essendo la funzione somma di 2 termini sempre positivi.

4 · LIMITI SIGNIFICATIVI AGLI ESTREMI DI Df

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2} + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2} + 1 = +\infty$$

5 · INTERSEZIONE CON GLI ASSI

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^2} + 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il grafico di $f(x)$ interseca l'asse y nel punto $(0, 1)$

$$\begin{cases} y = \sqrt[3]{x^2} + 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{mai essendo } f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Quindi il grafico di $f(x)$ non interseca l'asse x

6 · RICERCA DI EVENTUALI ASINTOTI OBLIQUI

Poichè è soddisfatta la condizione necessaria $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$ si cerca l'eventuale esistenza di asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} + \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right) = 0$$

Allo stesso modo $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x} = 0$

Non si hanno asintoti obliqui né a destra né a sinistra in quanto il risultato del limite è nullo

7 · CALCOLO DELLA DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3} x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \qquad Df' = (-\infty, 0) \cup (0; +\infty)$$

Poiché la derivata prima non è definita in $x=0$, dove invece è definita la funzione, si eseguono, in tale punto, i limiti destro e sinistro di $f'(x)$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

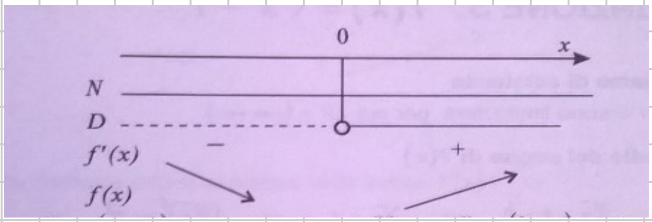
Nel punto $x=0$ il grafico di $f(x)$ presenta quindi un punto di cuspide

8 · STUDIO DEL SEGNO DI $f'(x)$

Poiché la $f'(x)$ è un'espressione fratta, si mette a confronto lo studio del segno del Numeratore e del Denominatore

$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0$ N: $2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D: $3\sqrt[3]{x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+_0$



La funzione è quindi decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e crescente nell'intervallo $(0; +\infty)$ entrambi appartenenti a Df.

Poiché $0 \in Df$ in tale punto si ha un minimo relativo di ordinata $f(0) = 1$; il minimo ha quindi coordinate in $(0,1)$

9 · CALCOLO DELLA DERIVATA SECONDA

È preferibile eseguire la derivata seconda sulla derivata prima espressa nella forma: $f'(x) = \frac{2}{3} x^{-1/3}$

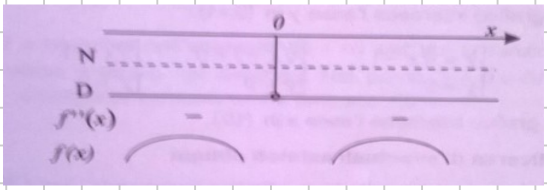
$$f''(x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) x^{(-1/3)-1} = -\frac{2}{9} x^{-4/3} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}} \qquad Df'' = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

10 · Studio del segno di $f''(x)$

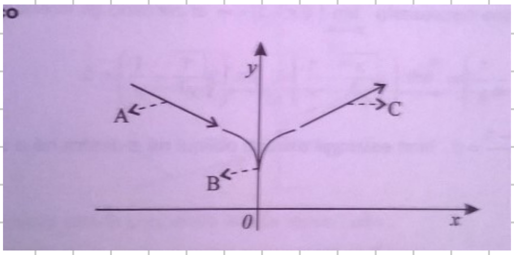
Come per la $f'(x)$ si mette a confronto lo studio del segno del Numeratore e quello del Denominatore

$\frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4}} > 0$ N: $-2 < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D: $9\sqrt[3]{x^4} > 0 \quad \forall x \in D_{f''}$



11 · Costruzione del grafico

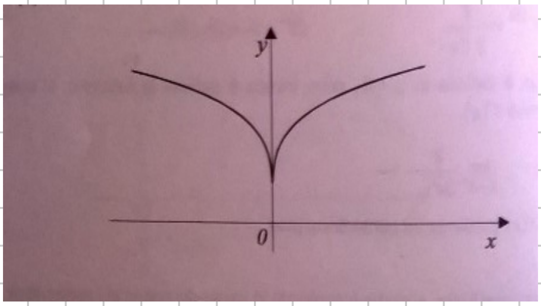


A · La funzione decresce con la concavità verso il basso;

B · Punto di attraversamento dell'asse y e punto di cuspide

C · La funzione è crescente con la concavità rivolta verso il basso.

A questo punto si traccia la linea che soddisfa le condizioni riportate sul piano cartesiano e si ottiene il diagramma di $f(x)$.



$y = \sqrt[3]{x^2} + 1$