STUDIO DI UNA FUNZIONE AD 1 VARIABILE

Titolo nota 14/05/2017

Per facilitare lo **STUDIO DI UNA FUNZIONE AD 1 VARIABILE** è conveniente svolgere i seguenti passaggi cercando di rispettare l'ordine di esecuzione;

1) Tipo della funzione
2) Dominio della funzione
3) Segno della funzione
4) Comportamento agli estremi del dominio
5) Intersezione con gli assi
6) Ricerca degli Asintoti
7) Ricerca di eventuali intersezioni tra funzione ed Asintoto orizzontale o obliquo
8) Ricerca degli intervalli di crescenza, decrescenza e delle ascisse ed ordinate dei Punti di MASSIMO o di MINIMO
9) Ricerca degli intervalli di concavità, convessità e ascisse ed ordinate dei Punti di FLESSO
10) Ricerca di eventuali simmetrie
11) Rappresentazione grafica della funzione.

---

1) Tipo della funzione:

Una funzione si può classificare entro i seguenti tipi:

a) **FUNZIONE RAZIONALE INTERA**: se è del tipo $y = P(x)$ dove $P(x)$ è il polinomio nella variabile x

b) **FUNZIONE RAZIONALE FRATTA**: se è del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono 2 polinomi nella variabile x

c) **FUNZIONE IRRAZIONALE INTERA**: se è del tipo $y = \sqrt[n]{P(x)}$

d) **FUNZIONE IRRAZIONALE FRATTA**: se è del tipo $y = \sqrt[n]{\frac{P(x)}{Q(x)}}$

e) FUNZIONE TRASCENDENTE ESPONENZIALE: se è del tipo $y = a^{P(x)}$ oppure $y = a^{\frac{P(x)}{Q(x)}}$

f) FUNZIONE TRASCENDENTE LOGARITMICA: se è del tipo $y = \log P(x)$ oppure $y = \log \frac{P(x)}{Q(x)}$

g) FUNZIONE TRASCENDENTE TRIGONOMETRICA: sono funzioni in cui compaiono espressioni trigonometriche.

2) Dominio della funzione:

a) se la funzione è RAZIONALE INTERA il dominio risulta: per ogni valore di x appartenente al campo Reale

b) se la funzione è RAZIONALE FRATTA il dominio risulta: per ogni valore di x appartenente al campo Reale ad esclusione dei valori che annullano il denominatore $Q(x)$

c) se la funzione è IRRAZIONALE INTERA (FRATTA) con indice del radicale dispari allora il dominio è come quello delle RAZIONALI INTERE (FRATTE)

d) se la funzione è IRRAZIONALE INTERA con indice del radicale pari allora si impone al radicando di essere positivo o nullo

e) se la funzione è IRRAZIONALE FRATTA con indice del radicale pari, allora si impone al radicando di essere positivo o nullo

f) se la funzione è TRASCENDENTE ESPONENZIALE allora il dominio è come quello delle funzioni RAZIONALI INTERE o FRATTE

g) se la funzione è TRASCENDENTE LOGARITMICA allora si impone all'argomento di essere maggiore di positivo.

3) Segno della funzione

Questo passaggio occupa un posto importantissimo nello STUDIO DI UNA FUNZIONE in quanto con esso è possibile delimitare la parte di piano entro la quale esiste la funzione.
Si vanno a cercare gli intervalli del Dominio nei quali la funzione risulta positiva o negativa.

Se la funzione è $y = f(x)$ allora si impone $y > 0$ e di conseguenza si avrà $f(x) > 0$.
Risolta tale disequazione si ottengono gli intervalli della x in cui la funzione è positiva e nello stesso tempo si trovano gli intervalli in cui la funzione è negativa.
Tutto questo passaggio necessita fissare il sistema di assi cartesiani e porre in essi i primi risultati ottenuti precedentemente per poter già iniziare la rappresentazione grafica della funzione considerata.

4) Comportamento agli estremi del Dominio

Dopo aver trovato gli estremi del dominio è necessario capire il comportamento della funzione in prossimità di questi estremi.
Per tale motivo si cercano i limiti della funzione al tendere di x ai valori estremanti del Dominio.
A questo punto si ricorda che se si trova una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ allora si dovrà ricorrere alla Regola di DE L'HOPITAL derivando distintamente Numeratore e Denominatore.
Inoltre si ricorda che tali comportamenti servono a trovare anche gli Asintoti della funzione data.

5) Intersezione con gli assi

Per trovare i punti d'incontro con i 2 assi cartesiani basta fare i sistemi tra la funzione ed i 2 assi.
Si ricorda che l'asse x delle ascisse ha equazione $y = 0$, mentre l'asse y delle ordinate ha equazione $x = 0$

6) Asintoti della funzione

Si premette che una FUNZIONE RAZIONALE INTERA non ammette Asintoti di alcun genere.
Si definisce ASINTOTO di una funzione una retta alla quale la curva rappresentativa della funzione si avvicina senza mai

toccarle ad eccezione degli ASINTOTI ORIZZONTALI o OBLIQUI che possono anche incontrare la curva.

Per cercare gli ASINTOTI VERTICALI di una funzione (normalmente fratta) si trovano prima le radici del Denominatore e quindi si fa il limite per x tendente ai valori che si sono trovati.

Se il risultato è infinito allora $x = x_1$ è un ASINTOTO VERTICALE della funzione.

Per cercare gli ASINTOTI ORIZZONTALI di una funzione (normalmente fratta) si calcolano i limiti per x tendente a $-\infty$ ed anche a $+\infty$.

Se il risultato è un numero finito h allora si dirà che $y = h$ è l'asintoto orizzontale.

Per cercare gli ASINTOTI OBLIQUI di una funzione (normalmente fratta) si ricorda dapprima che una retta obliqua ha equazione esplicita del tipo $y = mx + q$.

Il valore di m sarà dato dal limite per x tendente a $+\infty$ del rapporto tra la funzione ed x $\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}\right)$.

Se il risultato è diverso da zero allora il valore di q è dato dal limite per x tendente a $+\infty$ della differenza della funzione e mx.

- METODO TECNICO PER TROVARE GLI ASINTOTI DI UNA FUNZIONE RAZIONALE FRATTA

1) Si scompone Numeratore e Denominatore con relativa eventuale semplificazione
2) Si cercano le radici del Denominatore e se essi sono x_i si dirà che $x = x_i$ sono gli asintoti verticali
3) Se il grado del Numeratore è inferiore al grado del Denominatore allora esiste l'asintoto orizzontale che è $y = 0$ (asse delle ascisse)

4) Se il grado del Numeratore è uguale a quello del Denominatore allora esiste l'Asintoto Orizzontale che risulta $y = t$ dove t risulta il rapporto dei coefficienti di grado maggiore tra Numeratore e Denominatore (ovvero è il quoziente della divisione tra Numeratore e Denominatore)

5) Se il grado del Numeratore è superiore a quello del Denominatore di un solo grado allora esiste l'asintoto obliquo la cui equazione è $y = mx + q$ dove $mx + q$ risulta il quoziente della divisione tra Numeratore e Denominatore

6) Se il grado del Numeratore è superiore a quello del Denominatore di più di un grado allora esisterà un Asintoto curvo di equazione $y = q(x)$ dove $q(x)$ risulta il quoziente tra Numeratore e Denominatore

7) Ricerca eventuali intersezioni tra Asintoti Orizzontali oppure obliqui con la funzione

Innanzitutto si premette che una qualsiasi funzione non può incontrare MAI gli Asintoti Verticali poichè se $x = 1$ è un asintoto verticale allora $x = 1$ è un punto di DISCONTINUITÀ della funzione o punto d'infinito.

Possono invece esistere Intersezioni tra gli asintoti orizzontali oppure obliqui con la funzione.

Per trovare queste eventuali intersezioni basta fare il sistema tra la curva e i rispettivi asintoti.

8) Ricerca intervalli di crescenza, decrescenza e ascisse dei punti di Minimo e di Massimo

Si procede in questo modo:

a) si calcola la derivata prima della funzione ovvero $f'(x)$

b) si impone ad essa d'essere positiva ovvero si risolve la disequazione $f'(x) > 0$

c) trovati i risultati si dirà che essi sono gli intervalli di crescenza mentre i rimanenti del Dominio risultano gli intervalli di decrescenza

d) si illustra con un grafico il risultato ottenuto definendo nello stesso le ascisse dei punti di minimo o di massimo per i quali $f'(x)=0$

e) si sostituiscono le ascisse trovate nella funzione data per determinare le rispettive ordinate.

9) Ricerca intervalli di concavità, convessità e ascisse dei Punti di Flesso.

Si procede in questo modo:

a) si calcola la derivata seconda della funzione data ovvero la $f''(x)$

b) si impone ad essa d'essere positiva ovvero si risolve la disequazione $f''(x)>0$

c) Trovati i risultati si dirà che essi sono gli intervalli di concavità mentre i rimanenti del Dominio risultano quelli di convessità

d) si illustra con un grafico il risultato ottenuto definendo nello stesso le ascisse dei punti di flesso

e) si sostituiscono le ascisse trovate nella funzione data per determinare le rispettive ordinate

10) Ricerca eventuali simmetrie

Le simmetrie più importanti che possono essere riscontrate in uno studio di funzione sono:

a) simmetria rispetto all'asse delle ordinate: in questo caso deve avvenire che $f(x)=f(-x)$.

Se la funzione è RAZIONALE o IRRAZIONALE basta che la variabile indipendente x compaia solo con grado pari

b) simmetria rispetto l'origine: in questo caso deve avvenire che $f(x) = -f(-x)$

e) simmetria rispetto l'asse delle ascisse: questo è il caso meno frequente.

In questo caso deve avvenire che $f(y) = f(-y)$.

In pratica accade quando la funzione è IRRAZIONALE con indice pari.

11) Rappresentazione grafica della funzione

Rappresenta essere la parte più importante ma nello stesso tempo la più semplice se si procede in questo modo:

a) si rappresentano gli asintoti della funzione ed i punti derivanti dalle intersezioni con gli assi e dalle intersezioni con gli asintoti orizzontali o obliqui

b) si Tirano delle verticali non continue in corrispondenza delle intersezioni con l'asse delle ascisse

c) si cancellano le parti di piano in cui la funzione o non è positiva o non è negativa (da vedere il segno della funzione)

d) si rappresenta la funzione spostandosi (rispetto l'asse delle ascisse) da $-\infty$ a $+\infty$ rispettando asintoti e punti per i quali passa la funzione.