Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2017

<u>Problema 1</u>

PROBLEMA 1

Si può pedalare agevolmente su una bicicletta a ruote quadrate? A New York, al MoMath-Museum of Mathematics si può fare, in uno dei padiglioni dedicati al divertimento matematico (figura 1). È però necessario che il profilo della pedana su cui il lato della ruota può scorrere soddisfi alcuni requisiti.

In figura 2 è riportata una rappresentazione della situazione nel piano cartesiano Oxy: il quadrato di lato $DE = 2$ (in opportune unità di misura) e di centro C rappresenta la ruota della bicicletta, il grafico della funzione $f(x)$ rappresenta il profilo della pedana.

Figura 1

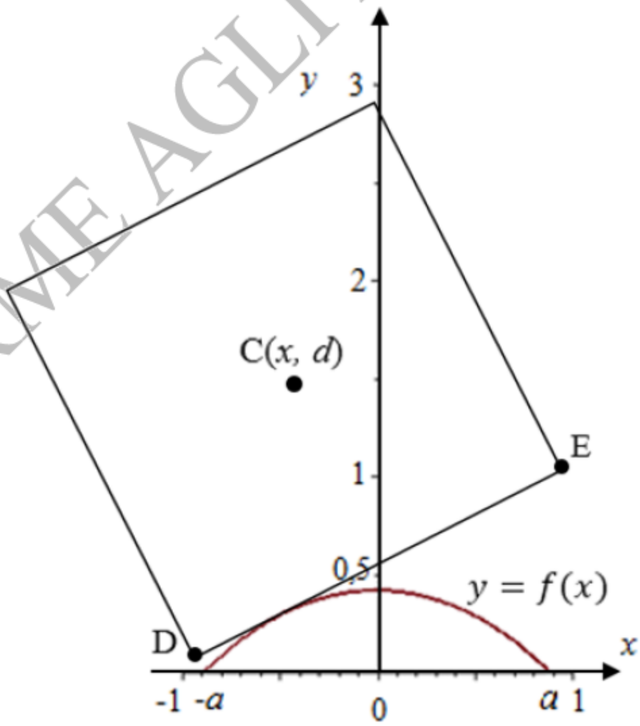


Figura 2

1) Sulla base delle informazioni ricavabili dal grafico in figura 2, mostra, con le opportune argomentazioni, che la funzione:

$$f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

rappresenta adeguatamente il profilo della pedana per $x \in [-a\,;\,a]$; determina inoltre il valore degli estremi a e $-a$ dell'intervallo.

Per visualizzare il profilo completo della pedana sulla quale la bicicletta potrà muoversi, si affiancano varie copie del grafico della funzione $f(x)$ relativo all'intervallo $[-a\ ;\ a]$, come mostrato in figura 3.

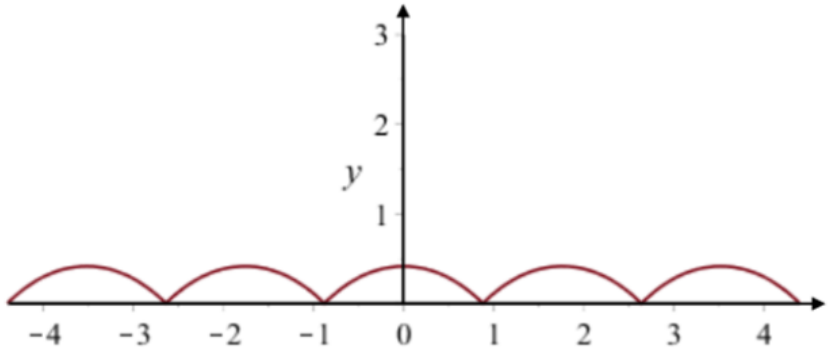


Figura 3

2) Perché la bicicletta possa procedere agevolmente sulla pedana è necessario che:

- a sinistra e a destra dei punti di non derivabilità i tratti del grafico siano ortogonali;
- la lunghezza del lato della ruota quadrata risulti pari alla lunghezza di una "gobba", cioè dell'arco di curva di equazione $y = f(x)$ per $x \in [-a;\ a]$.

Stabilisci se tali condizioni sono verificate.[1]

3) Considerando la similitudine dei triangoli rettangoli ACL e ALM in figura 4, e ricordando il significa geometrico della derivata, verifica che il valore dell'ordinata d del centro della ruota si mantie costante durante il moto. Pertanto, al ciclista sembra di muoversi su una superficie piana.

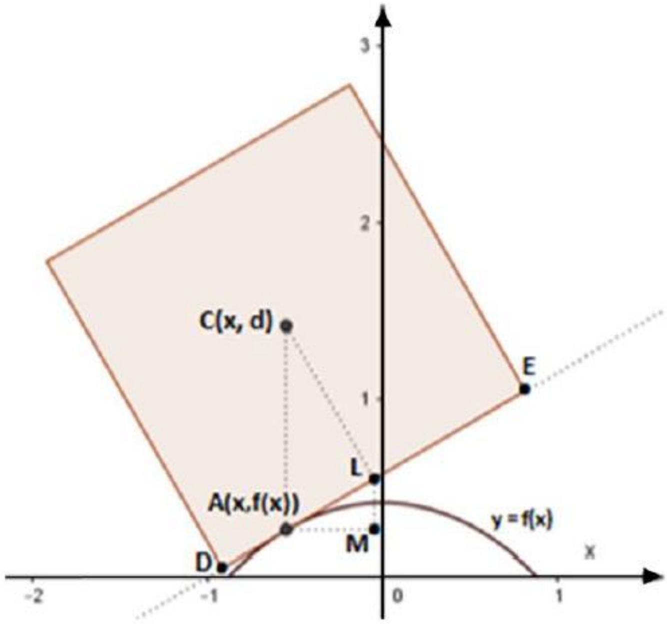


Figura 4

[1]In generale, la lunghezza dell'arco di curva avente equazione $y = \varphi(x)$ compreso tra le ascisse x_1 e x_2 è data da $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\, dx$.

Anche il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{per } x \in \left[-\frac{ln(3)}{2}; \frac{ln(3)}{2}\right]$$

se replicato varie volte, può rappresentare il profilo di una pedana adatta a essere percorsa da una bicicletta con ruote molto particolari, aventi la forma di un poligono regolare.

4) Individua tale poligono regolare, motivando la risposta.

Soluzione

Punto 1

La funzione assegnata può essere scritta (usando la funzione *coseno iperbolico* o *catenaria*, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$) nella forma:

$f(x) = \sqrt{2} - \cosh(x) \quad -a \le x \le a$.

L'uso delle funzioni iperboliche rende alcuni passaggi più veloci, ma si poteva anche procedere senza usare esplicitamente le funzioni iperboliche (che non sono nominate nelle *Indicazioni Nazionali!*).

E' una funzione pari e negli estremi è nulla. Si tratta di una catenaria cambiata di segno e traslata "verso l'alto" di $\sqrt{2}$.

Per x=0, si ha $f(0) = \sqrt{2} - 1$. In questo caso, la "ruota quadrata" ha il lato parallelo all'asse x. Questo valore della funzione fa congetturare che si abbia come ordinata costante del centro del quadrato $d = \sqrt{2}$, perché il lato del quadrato ha lato 2.

Si ha

$f'(x) = -\sinh(x) \quad -a \le x \le a$, dove $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Quindi il massimo di $f(x)$ si ha per x=0.

La derivata seconda è

$f''(x) = -\cosh(x) \quad -a \le x \le a$.

Quindi la funzione è concava nel suo dominio.

Poiché negli estremi dell'intervallo $-a \le x \le a$ si deve annullare, si ha:

$\sqrt{2} - \cosh(x) = 0$, ovvero

$\sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$.

Posto $t = e^x$, si ottiene l'equazione di 2° grado

$$t^2 - 2t\sqrt{2} + 1 = 0.$$

Le soluzioni sono $t = \sqrt{2} \pm 1$. Poiché $t = e^x$ si ottengono le soluzioni $x = \ln(\sqrt{2} \pm 1)$. Ma deve essere $0 < a < 1$, perché il segmento $-a \le x \le a$ deve avere lunghezza minore di 2. Quindi l'unica soluzione è $a = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,88$.

Punto 2.

Il profilo della pedana, pensato come una funzione, deve avere punti angolosi in $x = \pm a$ (oltre che in $\pm 3a, \pm 5a, \dots$).

Ragioniamo su $x = a$.

La "ruota quadrata" in questo punto deve avere una diagonale perpendicolare all'asse delle ascisse.

La derivata prima sinistra in questo punto è:

$$f_{-}^{'}(a) = -\sinh(a) = -\sinh\left(\ln(1+\sqrt{2})\right) = -1.$$

La derivata prima destra nello stesso punto vale 1 (basta ripetere calcoli analoghi ai precedenti). Quindi le rette tangenti alla curva nei punti angolosi sono tra loro ortogonali.

La lunghezza della curva grafico della funzione $f(x)$ sarà ovviamente 2 [si deve supporre un moto di puro rotolamento, cosa non detta dal testo]. Per dimostrarlo calcoliamo il seguente integrale, che fornisce la lunghezza della curva:

$$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Ricordando che il coseno iperbolico e il seno iperbolico sono legati dalla relazione $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (ovvero $X^2 - Y^2 = 1$), osservando anche che il $\cosh(x)$ è una funzione pari, si ottiene:

$$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+\sinh^2(x)}\, dx = \int_{-a}^{a} \cosh(x)\, dx = 2\int_{0}^{a} \cosh(x)\, dx = 2\left[\sinh(x)\right]_0^a =$$

$$= 2\sinh(a) = 2\sinh\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\sqrt{2} - \frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = 2$$

Punto 3

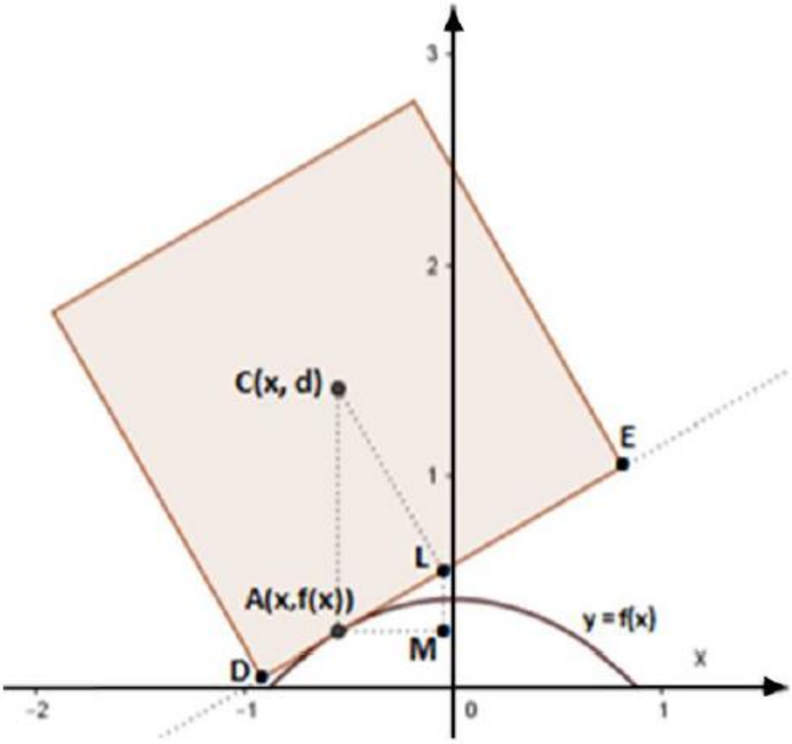


Figura 4

Dalla figura si ricava che L è il punto medio del lato DE del quadrato. Quindi CL misura 1. Dalla similitudine dei due triangoli rettangoli, posto $\alpha = M\hat{A}L = LCA$, si ha $CL = AC \cdot \cos\alpha$, da cui si ricava $AC = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$.

Possiamo quindi scrivere l'ordinata del centro C del quadrato nel seguente modo:

$$d(x) = y(A) + AC = f(x) + \frac{1}{\cos\alpha} = f(x) + \sec\alpha .$$

Poiché $\tan\alpha = f'(x) = -\sinh(x)$, si ha $\sec\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \sqrt{1+\sinh^2(x)} = \cosh(x)$.

Quindi l'ordinata del centro del quadrato in funzione di x sarà:

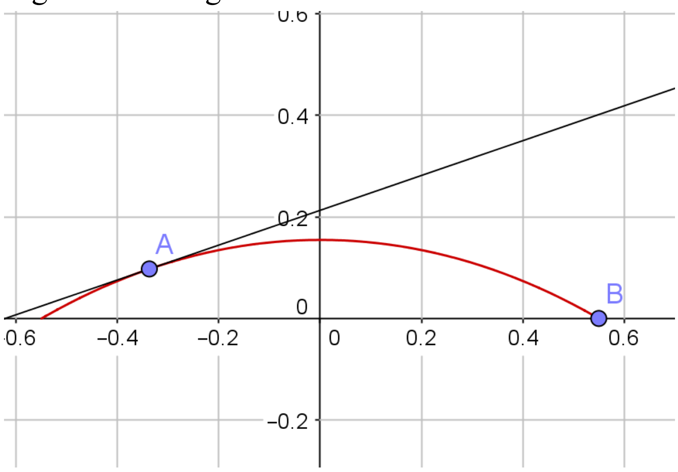
$$d(x) = f(x) + \sec\alpha = \sqrt{2} - \cosh(x) + \cosh(x) = \sqrt{2} .$$

Si ha pertanto che l'ordinata d del centro della "ruota quadrata" è costante, con $d = \sqrt{2}$.

Punto 4

Il grafico della funzione è analogo a quello visto al Punto1. Anche in questo caso la funzione si può scrivere nella forma $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \cosh(x)$, con $-\frac{\ln(3)}{2} \le x \le \frac{\ln(3)}{2}$, ovvero $-\ln\left(\sqrt{3}\right) \le x \le \ln\sqrt{3}$, con $\ln\left(\sqrt{3}\right) \approx 0,55$.

Il grafico è il seguente:

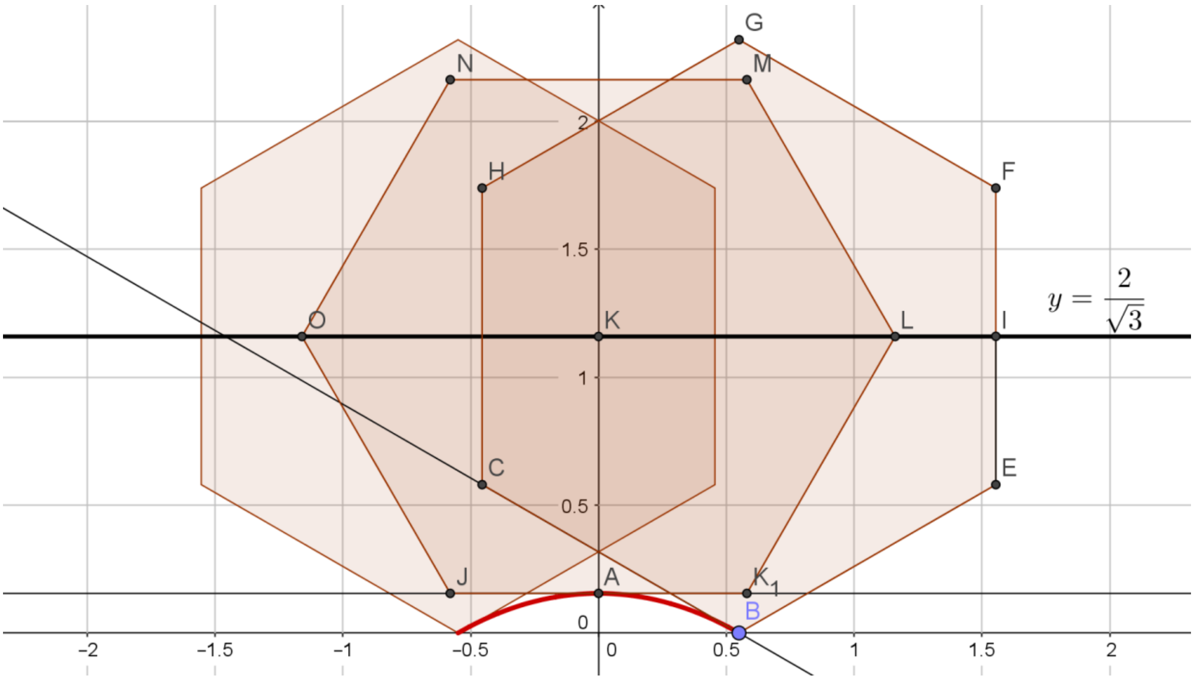


In questo caso si vede che la "ruota" ha la forma di un esagono regolare.

I punti angolosi sono i punti di ascissa $x = \pm\frac{\ln(3)}{2} = \pm\ln\left(\sqrt{3}\right)$. Calcolando la derivata prima sinistra in $x = \frac{\ln(3)}{2}$ si trova $f'_{-}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) = -\sinh\left(\ln\left(\sqrt{3}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Quindi l'angolo formato dalla retta tangente al grafico del profilo della guida con l'asse delle ascisse è in questo caso di 150°.

Il poligono è quindi un esagono regolare e la lunghezza della curva $l = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ è uguale alla misura del lato dell'esagono regolare.


G
N
M
H
F
O
K
L
I
C
E
J
A
K_1
B
$y = \frac{2}{\sqrt{3}}$
2
1.5
1
0.5
0
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
