Esame di Stato - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 22 giugno 2017

Problema 2

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodica di periodo $T = 4$ il cui grafico, nell'intervallo $[0; 4]$, è il seguente:

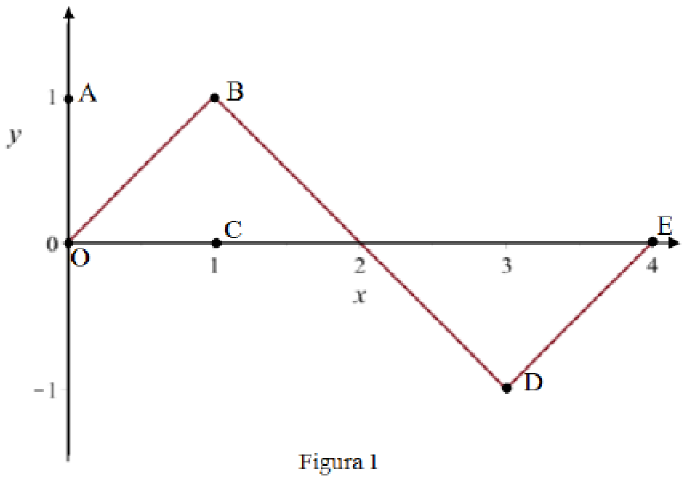


Figura 1

Come si evince dalla figura 1, i tratti OB, BD, DE del grafico sono segmenti i cui estremi hanno coordinate: $O(0,0)$, $B(1,1)$, $D(3,-1)$, $E(4,0)$.

1) Stabilisci in quali punti del suo insieme di definizione la funzione f è continua e in quali è derivabile e verifica l'esistenza dei limiti: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; qualora esistano, determinane il valore. Rappresenta inoltre, per $x \in [0; 4]$, i grafici delle funzioni:

$$g(x) = f'(x)$$

$$h(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

2) Considera la funzione:

$$s(x) = sen(bx)$$

con b costante reale positiva; determina b in modo che $s(x)$ abbia lo stesso periodo di $f(x)$.

Dimostra che la porzione quadrata di piano $OABC$ in figura 1 viene suddivisa dai grafici di $f(x)$ e $s(x)$ in 3 parti distinte e determina le probabilità che un punto preso a caso all'interno del quadrato $OABC$ ricada in ciascuna delle 3 parti individuate.

3) Considerando ora le funzioni:

$$f(x)^2 \quad \text{e} \quad s(x)^2$$

discuti, anche con argomentazioni qualitative, le variazioni (in aumento o in diminuzione) dei 3 valori di probabilità determinati al punto precedente.

4) Determina infine il volume del solido generato dalla rotazione attorno all'asse y della porzione di piano compresa tra il grafico della funzione h per $x \in [0;3]$ e l'asse delle x.

Soluzione

Punto 1

La funzione assegnata oscilla tra -1 e 1, è una funzione dispari, periodica di periodo T=4, continua su tutto R e non derivabile nei punti di ascissa $x = 1+2k,\ k \in Z$. Il primo limite non esiste perché non vale la definizione di limite finito a più infinito. Non è vero che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $M > 0$, tale che per ogni $x > M$ si abbia $|f(x) - l| < \varepsilon$. Per falsificare questa definizione basta prendere un $0 < \varepsilon \leq 1$.

Il secondo limite invece esiste. Lo si dimostra con il *Teorema del confronto* utilizzando questa disuguaglianza che vale per $x > 0$:

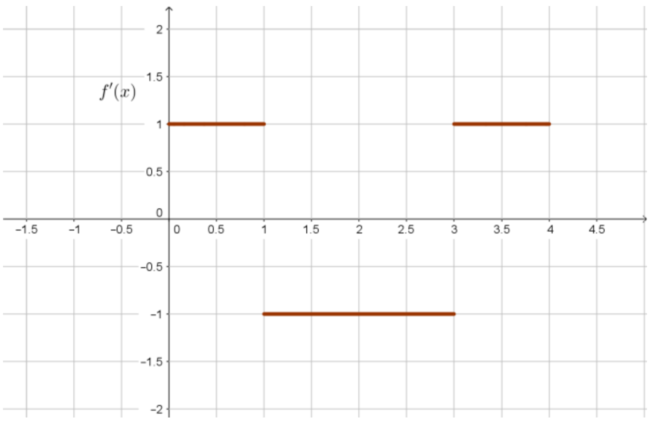
$$-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$$

e passando al limite per x che tende a $+\infty$.

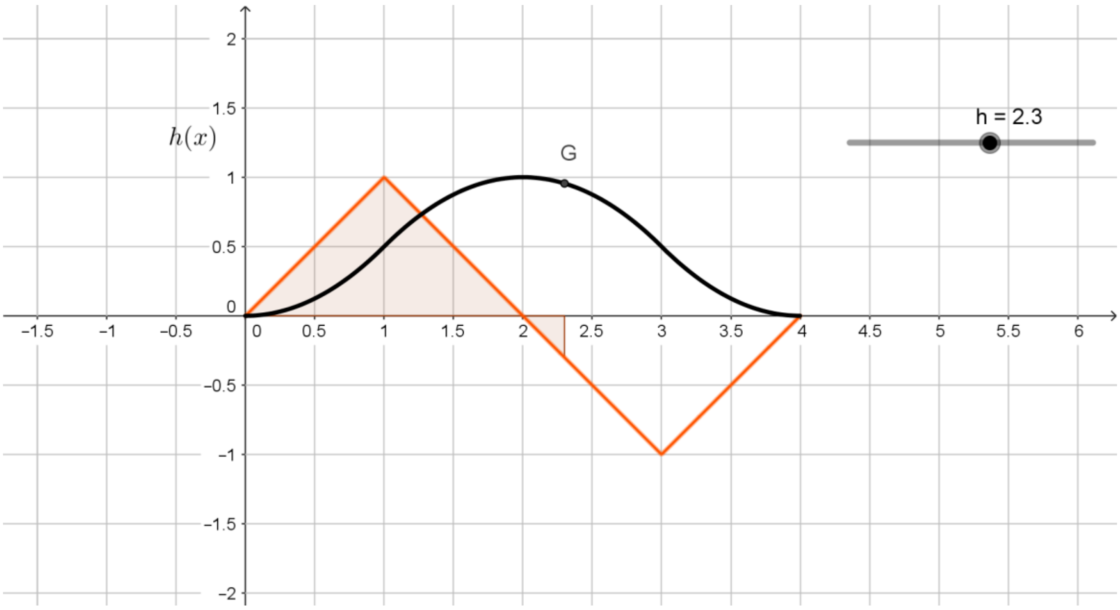
Il valore del secondo limite è quindi 0:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Il grafico della funzione $g(x) = f'(x)$ nell'intervallo $[0,4]$ è una funzione a scalini e non esiste in x=1 e in x=3 perché sono punti angolosi per la funzione $f(x)$:



Il grafico della funzione $h(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ nell'intervallo $[0,4]$ è una funzione rappresentata dal seguente grafico:



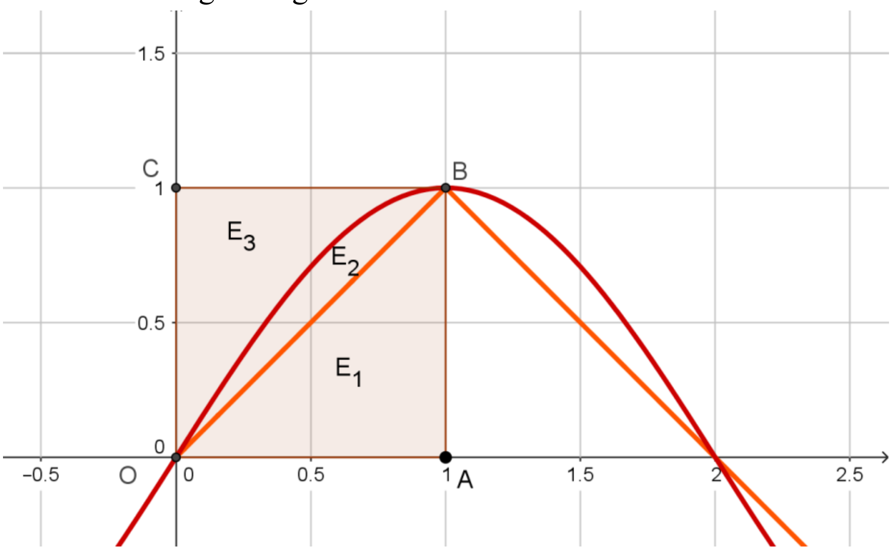
Ha un massimo per x=2 e tale massimo vale 1; si annulla ovviamente per x=0 e per x=4. E' simmetrica rispetto alla retta di equazione x=2. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale è derivabile nel suo dominio.

Punto 2

Il periodo della funzione $s(x)=\sin(bx)$, con $b\neq 0$, è $T=\dfrac{2\pi}{b}$. Quindi $4=\dfrac{2\pi}{b}$. Ne segue $b=\dfrac{\pi}{2}$.

La funzione è pertanto $s(x)=\sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$.

Disegniamo i grafici delle funzioni $f(x)$ ed $s(x)$ nello stesso sistema di assi cartesiani.
Otteniamo il seguente grafico:



L'area di ciascuna regione rappresente già la probabilità perché si deve fare il rapporto con l'area del quadrato di lato 1.
Si ha

$$p(E_1)=\frac{1}{2}=50\%$$

$$p(E_2) = \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \frac{1}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \approx 0,136 = 13,6\%$$

$$p(E_3) = 1 - \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0,36 = 36\%$$

Punto 3

Consideriamo la funzione $\left[f(x)\right]^2 = x^2$ nell'intervallo [0,1].

Quindi $p(E_1)$ diminuisce perché diventa 1/3 (il quadrato di un numero compreso tra 0 e 1 è minore del numero: $0 \le x^2 \le x \le 1$).

Si ha che $p(E_3)$ aumenta, per lo stesso ragionamento precedente, perché nell'intervallo [0,1] si ha

$$0 \le \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \le 1 .$$

Esattamente si ha:

$$p(E_3) = \frac{1}{2}.$$

Quindi $p(E_2)$ aumenta, ed esattamente si ha:

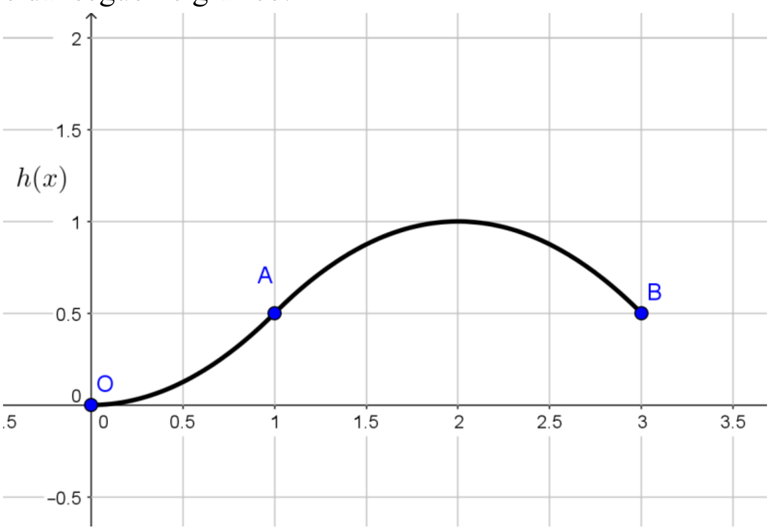
$$p(E_2) = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0,1(6)$$

Punto 4

La funzione $h(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ nell'intervallo $\left[0,3\right]$ è rappresentata dalla seguente espressione

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \le x < 1 \\ -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

e dal seguente grafico:



Con il metodo "dei gusci cilindrici", il volume del solido di rotazione si ottiene nel seguente modo:

$$V = 2\pi\int_0^3 x \cdot h(x)\,dx = 2\pi\int_0^1 x\left(\frac{x^2}{2}\right)dx + 2\pi\int_1^3 x\left(-\frac{x^2}{2} + 2x - 1\right)dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{20\pi}{3} = \frac{83\pi}{12}$$