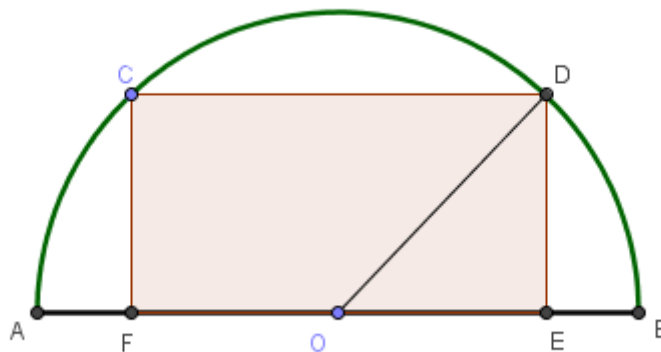


QUESTIONARIO

Quesito 2

2. Una torta di forma cilindrica è collocata sotto una cupola di plastica di forma emisferica. Dimostrare che la torta occupa meno dei $\frac{3}{5}$ del volume della semisfera.

Considero la sezione dei solidi con un piano passante per il centro della semisfera di raggio r e perpendicolare alla base della semisfera e del cilindro:



Il problema chiede di verificare che la torta cilindrica di volume massimo collocata sotto la cupola di forma emisferica ha volume minore dei $\frac{3}{5}$ della semisfera.

Indico con x l'altezza del cilindro ($DE = x$) con le limitazioni $0 < x < r$ (i casi limite restituirebbero una torta di volume nullo...).

Il raggio di base del cilindro è $OE = \sqrt{r^2 - x^2}$.

Volume della torta: $y = \pi x(r^2 - x^2)$ con $0 < x < r$.

$$y' = \pi(r^2 - 3x^2)$$

$y' > 0$ per $0 < x < r \frac{\sqrt{3}}{3}$ (funzione del volume crescente), $y' < 0$ per $r \frac{\sqrt{3}}{3} < x < r$ (funzione del volume decrescente).

Dunque il volume del cilindro è massimo per $x = r \frac{\sqrt{3}}{3}$, tale volume massimo è $V = \frac{2}{9} \sqrt{3} \pi r^3$.

Tale valore risulta minore dei $\frac{3}{5}$ della semisfera, infatti:

$$\frac{2}{9} \sqrt{3} \pi r^3 < \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} \pi r^3$$

$$\frac{1}{9} \sqrt{3} < \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{27} < \frac{1}{25}$$

$$25 < 27$$

c.v.d.